# Übungsblatt 5 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

29.) Man betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0.$$

Wie man sofort nachrechnet, ist eine Lösung dieser Dgl. gegeben durch $y = e^x$. Man finde nun mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)e^x$ eine zweite, unabhängige Lösung dieser Dgl. und damit die allgemeine Lösung.

30.) Man zeige, daß die Ricatti-Dgl.

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad Q(x) \neq 0,$$

durch die Substitution

$$y(x) = \frac{u'(x)}{Q(x)u(x)}$$

in eine lineare Dgl. zweiter Ordnung für $u(x)$ übergeführt wird.

31.) Man löse das AWP

$$y'' + y = \tan(x), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

mittels Variation der Konstanten (eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Dgl ist geg. durch $\{\cos(x), \sin(x)\}$).
Bemerkung: $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C.$

32.) Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität $L$ von 0.05 Henry, einem Widerstand $R$ von 20 Ohm, einem Kondensator $C$ von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, daß für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t).$

33.) Man bestimme die Laplace-Transformierten von folgenden Funktionen.

(a) $f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) d\tau$,

(b) $f_2(t) = \sin^3(t)$.
Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten $a$, $b$, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).

34.) Man zeige mittels partieller Integration, daß

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0,\infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0, t>0} f(t)$.

35.) Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9, \; y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.