

## Aufgabe 2 (25 %):

Binomialmodell zur Optionsbewertung: Betrachten Sie eine Aktie, die heute ( $t = 0$ ) den Wert von  $S_0 = 250$  EURO pro Stück hat und in  $t = 1$  entweder auf den Wert von  $S_u = 300$  EUR pro Stück steigt (Zustand u) oder auf den Wert von  $S_d = 200$  EUR pro Stück sinkt (Zustand d). Die Aktie bezahlt im betrachteten Zeitraum keine Dividende. Eine risikolose Alternative-Veranlagung (Sparbuch) bietet über den betrachteten Zeitraum eine Rendite von 5 %.

Mit  $C_0(K)$  bezeichnen wir den  $t = 0$  Wert einer amerikanischen Call-Option mit Laufzeit bis  $t=1$  und einem Ausübungspreis von  $K$ . Mit  $P_0(K)$  bezeichnen wir den  $t = 0$  Wert einer Amerikanischen Put Option mit Laufzeit bis  $t=1$  und einem Ausübungspreis von  $K$ . Der Wert der Put-Option bei Ausübung ist gleich  $\max(K - S, 0)$ . Beispiel:

Bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  sind die Werte  $P_{1u} = 0$  EUR pro Kontrakt und  $P_{1d} = 20$  EUR pro Kontrakt.

Welche der folgenden Aussagen sind (drei richtig):

- a) Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 30,00 (auf Cent gerundet).
- b) Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 0,00 (auf Cent gerundet).
- c) Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist es optimal, die Put-Option nicht zum Zeitpunkt  $t=0$  auszuüben. (TRUE)
- d) Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit  $\pi$  für einen Übergang in den Zustand u in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich  $\frac{5}{8} = 62,5\%$ . (TRUE)
- e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  der Zinssatz auf  $r = 0\%$ , dann sinkt der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  auf EUR 40,00 (auf Cent gerundet). (TRUE)
- f) Bei einem Ausübungspreis von  $K=270$  ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 20,00 (auf Cent gerundet).

- g) Nehmen Sie nun an, im Optimum wäre der relative Deckungsbeitrag von  $x_1$  (= duale Variable der Variable  $x_1$ ) negativ. (Die Schattenpreise der Nebenbedingungen würden dann natürlich nicht die oben gegebenen Werte annehmen.) Die optimale Lösung wäre in diesem Fall entweder  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$  oder  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

### Aufgabe 2 (25 %):

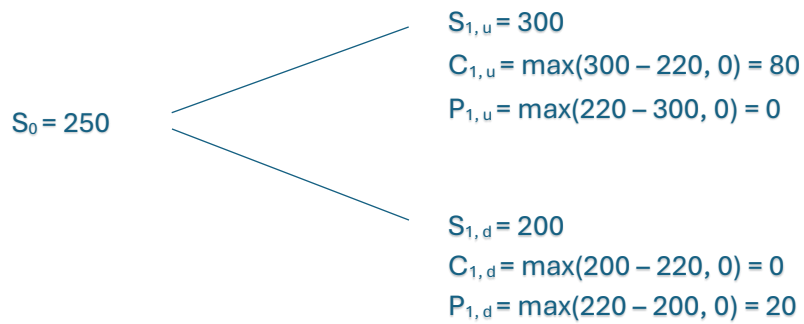
Binomialmodell zur Optionsbewertung: Betrachten Sie eine Aktie, die heute ( $t = 0$ ) den Wert von  $S_0 = 250$  EUR pro Stück hat und in  $t = 1$  entweder auf den Wert von  $S_{1u} = 300$  EUR pro Stück steigt (Zustand  $u$ ) oder auf den Wert von  $S_{1d} = 200$  EUR pro Stück sinkt (Zustand  $d$ ). Die Aktie bezahlt im betrachteten Zeitraum keine Dividende. Eine risikolose Alternativveranlagung (Sparbuch) bietet über den betrachteten Zeitraum eine Rendite von 5%.

Mit  $C_0(K)$  bezeichnen wir den  $t = 0$  Wert einer Amerikanischen Call Option mit Laufzeit bis  $t = 1$  und einem Ausübungspreis von  $K$ . Mit  $P_0(K)$  bezeichnen wir den  $t = 0$  Wert einer Amerikanischen Put Option mit Laufzeit bis  $t = 1$  und einem Ausübungspreis von  $K$ . Der Wert der Put-Option bei Ausübung ist gleich  $\max(K - S, 0)$ . Beispiel: Bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  sind die Werte  $P_{1u} = 0$  EUR pro Kontrakt und  $P_{1d} = 20$  EUR pro Kontrakt.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

- a) Bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  ist der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich EUR 30.00 (auf Cent gerundet). (250 - 220)
- b) Bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich EUR 0.00 (auf Cent gerundet).
- c) Bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  ist es optimal, die Put Option nicht zum Zeitpunkt  $t = 0$  auszuüben.
- d) Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit  $\pi$  für einen Übergang in den Zustand  $u$  in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich  $5/8 = 62.5\%$ .
- e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von  $K = 220$  der Zinssatz auf  $r = 0\%$ , dann sinkt der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf EUR 40.00 (auf Cent gerundet).
- f) Bei einem Ausübungspreis von  $K = 270$  ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich EUR 20.00 (auf Cent gerundet).

Lösungsversuch von Bbob:



Der Wert der **Put-Option** bei Ausübung:  $P_T = \max(K - S, 0)$

Der Wert der **Call-Option** bei Ausübung:  $C_T = \max(S - K, 0)$

**d)** Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit  $\pi$  für einen Übergang in den Zustand  $u$  in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich  $\frac{5}{8} = 62,5\%$ . (TRUE)

In der Wertentwicklung der Aktie steckt ja implizit eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Zustände  $u$  und  $d$ .

Nach Bellman muss ja gelten:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \{ \pi^* \cdot S_{1,u} + (1 - \pi^*) \cdot S_{1,d} \}$$

Löst man obige Gleichung nach  $\pi^*$ , so ergibt das

$$\pi^* = \frac{(1+r) \cdot S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}$$

$$\pi^* = \frac{(1 + 0.05) \cdot 250 - 200}{300 - 200}$$

$$\pi^* = 0.625$$

-> d) ist richtig

**a)** Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 30,00 (auf Cent gerundet).

Damit ergibt sich als Wert für die Call Option (wenn man sie bei  $t = 1$  ausübt)

$C_0$  nicht sofort ausüben:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \{ \tilde{\pi} \cdot C_{1,u} + (1 - \tilde{\pi}) \cdot C_{1,d} \}$$

$$C_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 80 + (1 - 0.625) \cdot 0 \}$$

$$C_0 = 47.6190$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei  $t = 0$  ausübt)

$C_0$  sofort ausüben:

$$C_0 = \max(S - K, 0)$$

$$C_0 = \max(250 - 220, 0)$$

$$C_0 = 30$$

Der Wert der Call Option ist dann gleich

$$C_0 = \max\{C_{\text{sofort ausüben}}, C_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{30, 47.6190\}$$

$$C_0 = 47.6190$$

**-> a) ist falsch**

**b)** Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 0,00 (auf Cent gerundet).

Wert für die Put Option (wenn man sie bei  $t = 1$  ausübt)

$P_0$  nicht sofort ausüben:

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \{ \pi^* \cdot P_{1,u} + (1 - \pi^*) \cdot P_{1,d} \}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 0 + (1 - 0.625) \cdot 20 \}$$

$$P_0 = 7.1428$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei  $t = 0$  ausübt)

$P_0$  sofort ausüben:

$$P_0 = \max(K - S, 0)$$

$$P_0 = \max(220 - 250, 0)$$

$$P_0 = 0$$

Der Wert der Put Option ist dann gleich

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{0, 7.1428\}$$

$$P_0 = 7.1428$$

**-> b) ist falsch**

**c)** Bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  ist es optimal, die Put-Option nicht zum Zeitpunkt  $t=0$  auszuüben. (TRUE)

Das stimmt, da  $P_{0, \text{sofort ausüben}}$  gleich 0 ist und  $P_{0, \text{nicht sofort ausüben}}$  gleich 7.1428 ist

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{0, 7.1428\}$$

$$P_0 = 7.1428$$

**-> c) ist richtig**

e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von  $K=220$  der Zinssatz auf  $r = 0\%$ , dann sinkt der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  auf EUR 40,00 (auf Cent gerundet). (TRUE)

Pseudo-Wahrscheinlichkeit  $\pi^*$ :

$$\pi^* = \frac{(1 + r) \cdot S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}$$

$$\pi^* = \frac{(1 + 0.00) \cdot 250 - 200}{300 - 200}$$

$$\pi^* = 0.5$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei  $t=1$  ausübt)

$C_0$  nicht sofort ausüben:

$$C_0 = \frac{1}{1 + r} \{ \pi^* \cdot C_{1,u} + (1 - \pi^*) \cdot C_{1,d} \}$$

$$C_0 = \frac{1}{1 + 0.00} \{ 0.5 \cdot 80 + (1 - 0.5) \cdot 0 \}$$

$$C_0 = 40$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei  $t=0$  ausübt)

$C_0$  sofort ausüben:

$$C_0 = \max(S - K, 0)$$

$$C_0 = \max(250 - 220, 0)$$

$$C_0 = 30$$

Der Wert der Call Option ist dann gleich

$$C_0 = \max\{C_{\text{sofort ausüben}}, C_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{40, 25\}$$

$$C_0 = 40$$

-> e) ist richtig

**f)** Bei einem Ausübungspreis von  $K=270$  ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt  $t=0$  gleich EUR 20,00 (auf Cent gerundet).

$$P_{1,u} = \max(270 - 300, 0) = 0$$

$$P_{1,d} = \max(270 - 200, 0) = 70$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei  $t=1$  ausübt)

$P_0$  nicht sofort ausüben:

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \{ \tilde{\pi} \cdot P_{1,u} + (1 - \tilde{\pi}) \cdot P_{1,d} \}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 0 + (1 - 0.625) \cdot 70 \}$$

$$P_0 = 25$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei  $t=0$  ausübt)

$P_0$  sofort ausüben:

$$P_0 = \max(K - S, 0)$$

$$P_0 = \max(270 - 250, 0)$$

$$P_0 = 20$$

Der Wert der Put Option ist dann gleich

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{20, 25\}$$

$$P_0 = 25$$

**-> f) ist falsch**