

Aufgabe 2 (25 %):

Binomialmodell zur Optionsbewertung: Betrachten Sie eine Aktie, die heute ($t = 0$) den Wert von $S_0 = 250$ EURO pro Stück hat und in $t = 1$ entweder auf den Wert von $S_u = 300$ EUR pro Stück steigt (Zustand u) oder auf den Wert von $S_d = 200$ EUR pro Stück sinkt (Zustand d). Die Aktie bezahlt im betrachteten Zeitraum keine Dividende. Eine risikolose Alternative-Veranlagung (Sparbuch) bietet über den betrachteten Zeitraum eine Rendite von 5 %.

Mit $C_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer amerikanischen Call-Option mit Laufzeit bis $t=1$ und einem Ausübungspreis von K . Mit $P_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer Amerikanischen Put Option mit Laufzeit bis $t=1$ und einem Ausübungspreis von K . Der Wert der Put-Option bei Ausübung ist gleich $\max(K-S, 0)$. Beispiel:

Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ sind die Werte $P_{1u} = 0$ EUR pro Kontrakt und $P_{1d} = 20$ EUR pro Kontrakt.

Welche der folgenden Aussagen sind (drei richtig):

- a)** Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 30,00 (auf Cent gerundet).
- b)** Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 0,00 (auf Cent gerundet).
- c)** Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist es optimal, die Put-Option nicht zum Zeitpunkt $t=0$ auszuüben. (TRUE)
- d)** Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit π für einen Übergang in den Zustand u in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich $\frac{5}{8} = 62,5\%$. (TRUE)
- e)** Sinkt bei einem Ausübungspreis von $K=220$ der Zinssatz auf $r = 0\%$, dann sinkt der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt $t=0$ auf EUR 40,00 (auf Cent gerundet). (TRUE)
- f)** Bei einem Ausübungspreis von $K=270$ ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 20,00 (auf Cent gerundet).

- Q Nehmen Sie nun an, im Optimum wäre der relative Deckungsbeitrag von x_1 (die duale Variable der Variable x_1) negativ. (Die Schattenpreise der Nebenbedingungen würden dann natürlich nicht die oben gegebenen Werte annehmen.) Die optimale Lösung wäre in diesem Fall entweder $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Aufgabe 2 (25 %):

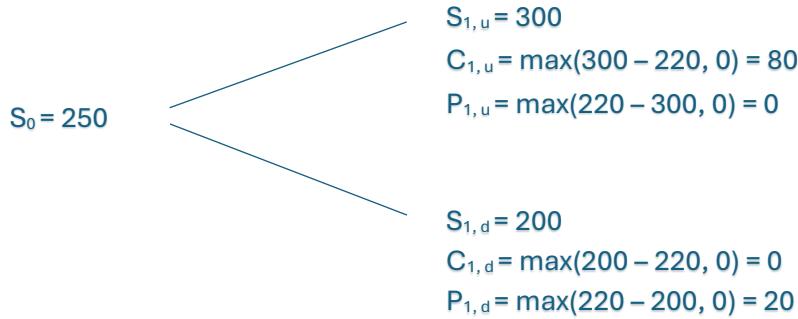
Binomialmodell zur Optionsbewertung: Betrachten Sie eine Aktie, die heute ($t = 0$) den Wert von $S_0 = 250$ EUR pro Stück hat und in $t = 1$ entweder auf den Wert von $S_{1u} = 300$ EUR pro Stück steigt (Zustand u) oder auf den Wert von $S_{1d} = 200$ EUR pro Stück sinkt (Zustand d). Die Aktie bezahlt im betrachteten Zeitraum keine Dividende. Eine risikolose Alternativveranlagung (Sparbuch) bietet über den betrachteten Zeitraum eine Rendite von 5%. $\frac{1,05}{}$

Mit $C_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer Amerikanischen Call Option mit Laufzeit bis $t = 1$ und einem Ausübungspreis von K . Mit $P_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer Amerikanischen Put Option mit Laufzeit bis $t = 1$ und einem Ausübungspreis von K . Der Wert der Put-Option bei Ausübung ist gleich $\max(K - S, 0)$. Beispiel: Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ sind die Werte $P_{tu} = 0$ EUR pro Kontrakt und $P_{1d} = 20$ EUR pro Kontrakt.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

- a) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 30.00 (auf Cent gerundet). $(250 - 220)$
- b) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 0.00 (auf Cent gerundet).
- c) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist es optimal, die Put Option nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ auszuüben.
- d) Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit π für einen Übergang in den Zustand u in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich $5/8 = 62.5\%$.
- e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ der Zinssatz auf $r = 0\%$, dann sinkt der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt $t = 0$ auf EUR 40.00 (auf Cent gerundet).
- f) Bei einem Ausübungspreis von $K = 270$ ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 20.00 (auf Cent gerundet).

Lösungsversuch von Bbob:



Der Wert der **Put-Option** bei Ausübung: $P_T = \max(K - S, 0)$

Der Wert der **Call-Option** bei Ausübung: $C_T = \max(S - K, 0)$

d) Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit π für einen Übergang in den Zustand u in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich $\frac{5}{8} = 62,5\%$. (TRUE)

In der Wertentwicklung der Aktie steckt ja implizit eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Zustände u und d .

Nach Bellman muss ja gelten:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \{ \pi^* \cdot S_{1,u} + (1 - \pi^*) \cdot S_{1,d} \}$$

Löst man obige Gleichung nach π^* , so ergibt das

$$\pi^* = \frac{(1 + r) \cdot S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}$$

$$\pi^* = \frac{(1 + 0.05) \cdot 250 - 200}{300 - 200}$$

$$\pi^* = 0.625$$

-> d) ist richtig

a) Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 30,00 (auf Cent gerundet).

Damit ergibt sich als Wert für die Call Option (wenn man sie bei $t = 1$ ausübt)

C_0 nicht sofort ausüben:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \{ \tilde{\pi} \cdot C_{1,u} + (1 - \tilde{\pi}) \cdot C_{1,d} \}$$

$$C_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 80 + (1 - 0.625) \cdot 0 \}$$

$$C_0 = 47.6190$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei $t = 0$ ausübt)

C_0 sofort ausüben:

$$C_0 = \max(S - K, 0)$$

$$C_0 = \max(250 - 220, 0)$$

$$C_0 = 30$$

Der Wert der Call Option ist dann gleich

$$C_0 = \max\{C_{\text{sofort ausüben}}, C_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{30, 47.6190\}$$

$$C_0 = 47.6190$$

-> a) ist falsch

- b)** Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 0,00 (auf Cent gerundet).

Wert für die Put Option (wenn man sie bei $t = 1$ ausübt)

P_0 nicht sofort ausüben:

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \{ \pi^* \cdot P_{1,u} + (1 - \pi^*) \cdot P_{1,d} \}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 0 + (1 - 0.625) \cdot 20 \}$$

$$P_0 = 7.1428$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei $t = 0$ ausübt)

P_0 sofort ausüben:

$$P_0 = \max(K - S, 0)$$

$$P_0 = \max(220 - 250, 0)$$

$$P_0 = 0$$

Der Wert der Put Option ist dann gleich

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{0, 7.1428\}$$

$$P_0 = 7.1428$$

-> **b) ist falsch**

- c)** Bei einem Ausübungspreis von $K=220$ ist es optimal, die Put-Option nicht zum Zeitpunkt $t=0$ auszuüben. (TRUE)

Das stimmt, da $P_{0, \text{sofort ausüben}}$ gleich 0 ist und $P_{0, \text{nicht sofort ausüben}}$ gleich 7.1428 ist

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{0, 7.1428\}$$

$$P_0 = 7.1428$$

-> **c) ist richtig**

- e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von $K=220$ der Zinssatz auf $r = 0\%$, dann sinkt der Marktwert der Call-Option zum Zeitpunkt $t=0$ auf EUR 40,00 (auf Cent gerundet). (TRUE)

Pseudo-Wahrscheinlichkeit π^{\sim} :

$$\pi^{\sim} = \frac{(1 + r) \cdot S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}$$

$$\pi^{\sim} = \frac{(1 + 0.00) \cdot 250 - 200}{300 - 200}$$

$$\pi^{\sim} = 0.5$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei $t=1$ ausübt)

C_0 nicht sofort ausüben:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \{ \pi^{\sim} \cdot C_{1,u} + (1 - \pi^{\sim}) \cdot C_{1,d} \}$$

$$C_0 = \frac{1}{1+0.00} \{ 0.5 \cdot 80 + (1 - 0.5) \cdot 0 \}$$

$$C_0 = 40$$

Wert für die Call Option (wenn man sie bei $t=0$ ausübt)

C_0 sofort ausüben:

$$C_0 = \max(S - K, 0)$$

$$C_0 = \max(250 - 220, 0)$$

$$C_0 = 30$$

Der Wert der Call Option ist dann gleich

$$C_0 = \max\{C_{\text{sofort ausüben}}, C_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{40, 25\}$$

$$C_0 = 40$$

-> e) ist richtig

f) Bei einem Ausübungspreis von $K=270$ ist der Marktwert der Put-Option zum Zeitpunkt $t=0$ gleich EUR 20,00 (auf Cent gerundet).

$$P_{1,u} = \max(270 - 300, 0) = 0$$

$$P_{1,d} = \max(270 - 200, 0) = 70$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei $t=1$ ausübt)

P_0 nicht sofort ausüben:

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \{ \tilde{\pi} \cdot P_{1,u} + (1 - \tilde{\pi}) \cdot P_{1,d} \}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+0.05} \{ 0.625 \cdot 0 + (1 - 0.625) \cdot 70 \}$$

$$P_0 = 25$$

Wert für die Put Option (wenn man sie bei $t=0$ ausübt)

P_0 sofort ausüben:

$$P_0 = \max(K - S, 0)$$

$$P_0 = \max(270 - 250, 0)$$

$$P_0 = 20$$

Der Wert der Put Option ist dann gleich

$$P_0 = \max\{P_{\text{sofort ausüben}}, P_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{20, 25\}$$

$$P_0 = 25$$

-> f) ist falsch