Beispiel 141 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 11, 22.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen sehr wichtig (z.B, mathematische Berechnung von mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen).

2.1 Definition: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = s(x)$$

heißt eine lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ($a, b \in \mathbb{R}$).
$s(x)$ ist die Störfunktion. Wenn $s(x) = 0$ so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen.
Wichtige weitere Kennzeichen:

1. y, y' treten linear (in 1. Potenz) auf
2. 'Gemischte' Produkte (yy', yy'', $y'y''$) kommen nicht vor.

2.2 Allg. Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung

Es gilt:

1. $y_1(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung - dann ist auch die mit einer beliebigen Konstanten c ($c \in \mathbb{R}$) eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c \cdot y_1(x)$$

2. $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien zwei Lösungen der Differentialgleichung. Die folgende aus ihnen gebildete Linearkombination ist dann auch eine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. Ist $y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung, so sind auch Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ (reelle) Lösungen der Differentialgleichung.

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind die sog. Basisfunktionen oder Basislösungen der Gleichung, wenn für die folgende `Wronski`-Determinante gilt:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Ist die `Wronski`-Determinante nicht Null, so spricht man von einer Fundamentalbasis.
Ist die `Wronski`-Determinante 0, dann sind die Basisfunktionen $y_1 = y(x)$, $y_2 = xy(x)$.
Die Linearkombination zweier unabhängiger Lösungen (Basislösungen) $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ in der Form

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ist dann die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung,

2.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Wir gewinnen die Fundamentalbasis der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ (Parameter λ). Wir führen die zwei Ableitungen $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ durch und erhalten zunächst die quadratische Bestimmungsgleichung für den Parameter λ:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x}$$

Diese führt nach Division durch $e^{\lambda x}$ zum folgenden **charakteristischen Polynom**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Wir betrachten die drei möglichen Lösungsfälle von $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-4b}{4}}$.
Dabei betrachten wir besonders den Radikanden $\sqrt{a^2 - 4b}$:

1. $\mathbf{a^2 - 4b > 0}$

   Zwei verschiedene, reelle Lösungen λ_1 und λ_2, welche zu den Lösungsfunktionen $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ führen. Diese sind linear unabhängig voneinander (`Wronski`-Determinane $\neq 0$) und somit eine Fundamentalbasis der homogenen Differentialgleichung, welche als allgemeine Lösung folgende Linearkombination hat:

   $$y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \qquad c_1, c_2 \mathbb{R} \in$$

2. $\mathbf{a^2 - 4b = 0}$

   Erhalte $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ $(\in \mathbb{R})$. Die zugehörige `Wronski`-Determinante ist Null.

   Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination aus den beiden Basislösungen $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ und $y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$, also

   $$y(x) = (c_1 x + c_2) \cdot e^{-\frac{a}{2}x}$$

3. $\mathbf{a^2 - 4b < 0}$

   $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex, $\alpha = -\frac{a}{2}$, $4\omega^2 = 4b - a^2 > 0$)

   Fundamentalbasis: $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x), y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$

   Allgemeine Lösung: $y = e^{\alpha x}(c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x))$

2.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung $y(y(x)$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer beliebigen, partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.
Zur Errechnung einer partikulären Lösung verwendet man einen von dem Typ der Störfunktion $s(x)$ abhängenden Lösungsansatz:

- Polynomfunktion vom Grad n

  $s(x) = P_n(x)$

  - Lösungsansatz:
    Polynomfunktion vom Grad n

    $$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ xQ_n(x) & a \neq 0, b = 0 \\ x^2 Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$$

    $Q_n(x)$: Polynomfunktion vom Grad n

    Parameter; Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$

- Störfunktion ist Exponentialfunktion
  $s(x) = e^{cx}$
  - c ist keine Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p^{(x)} = A \cdot e^{cx}$$
    Parameter A
  - c ist eine einfache Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p^{(x)} = xA \cdot e^{cx}$$
    Parameter A
  - c ist eine doppelte Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p^{(x)} = x^2 A \cdot e^{cx}$$
    Parameter A
- Störfunktion in der Art $s(x) = \sin(\beta x)$, $s(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination (Überlagerung von $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$.
  - $j\beta$ ist keine Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$$
    oder
    $$y_p^{(x)} = C \cdot \sin(\beta x \ \varphi)$$
    Parameter: A, B bzw. C,φ
  - $j\beta$ ist eine Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p = x \cdot (A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x))$$
    oder
    $$y_p^{(x)} = Cx \cdot \sin(\beta x \ \varphi)$$
    Parameter: A, B bzw. C,φ
- Störfunktion in der Art $s(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $s(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$
  $P_n(x)$: Polynomfunktion vom Grad n
  - $c + j\beta$ ist keine Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:
    $$y_p = e^{cx} \cdot (Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)$$
    $Q_n(x)$, $R_n(x)$: Polynomfunktion vom Grad n
    Parameter: Koeffizienten und Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$

– $c + j\beta$ ist eine Lösung des charakteristischen Polynoms - Lösungsansatz:

$$y_p = xe^{cx} \cdot (Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)$$

$Q_n(x)$, $R_n(x)$: Polynomfunktion vom Grad n
Parameter: Koeffizienten und Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$

Abschließend berechnet man noch die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Addition von allgemeiner Lösung der homogenen Differentialgleichung mit einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

3 Lösung des Beispiels

Die allgemeine Lösung der : inhomogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

wird in drei Schritten bestimmt:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$
2. Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)
3. Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$); ggf. Lösung der Anfangswertaufgabe

3.1 Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$

Lösung von $y'' + 4y' + 4y = 0$ durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ (Parameter λ). Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Einsetzen des Ansatzes ergibt:

$$\begin{gathered} \lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0 \qquad | : e^{\lambda x} \; (e^{\lambda x} \neq 0) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad \text{charakteristisches Polynom} \\ (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 2) = 0 \qquad \text{Zerlegung in Linearfaktoren} \\ \text{Erhalte Lösungen mit Fall } \; \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \qquad \text{Doppellösung}, \; \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Die `Wronski`-Determinante ist 0 und die Basisfunktionen sind somit: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$. Die **allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung** lautet somit:

$$\mathbf{y = (c_1 x + c_2) \cdot e^{-2x}}$$

3.2 Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)

Betrachte **Störfunktion** - Typus $s(x) = e^{cx}$. Unsere Störfunktion lautet $s(x) = e^{-2x}$ - mit $c = -2$.
Vergleiche c mit λ_1 und λ_2 - $c = \lambda_1 = \lambda_2$ $\Rightarrow$ **doppelter Resonanzfall**, **Verwendung der Versuchslösung $\mathbf{y_p^{(x)} = x^2 A e^{-2x}}$**. Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y_p' = 2xAe^{-2x} - 2x^2Ae^{-2x}$$
$$y_p'' = 2Ae^{-2x} - 4xAe^{-2x} - 4xAe^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} = 4x^2Ae^{-2x} - 8xAe^{-2x} + 2Ae^{-2x}$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$4x^2Ae^{-2x} - 8xAe^{-2x} + 2Ae^{-2x} + 8xAe^{-2x} - 8x^2Ae^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} = e^{-2x}$$
$$2Ae^{-2x} = e^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y_p^{(x)} = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}}$$

3.3 Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$)

$$\mathbf{y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)} = (c_1x + x_2)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}}$$