

Theoretische Informatik und Logik

Übungsblatt 9 (SS2009)

Lösungen

Aufgabe 9.1 Drücken Sie folgende Prädikate bzw. Sätze als Formeln in \mathbb{N} über der Standardsignatur aus. Lassen Sie dabei Unterstreichungen weg und verwenden Sie Infixnotation, aber achten Sie auf korrekte Klammerung.

- a) Das arithmetische Mittel von y und z ist keine natürliche Zahl.
- b) Der Nachfolger jeder geraden Zahl ist ungerade.
- c) x ist höchstens halb so groß wie das Dreifache von y .
Hinweis: Beachten Sie, dass 2 und 3 keine Konstanten in der Modellstruktur \mathbb{N} sind!

Lösung

- a) $\neg(\exists x)(x + x) = (y + z)$
- b) $(\forall x)[(\exists y)x = (y + y) \supset \neg(\exists y)(x + 1) = (y + y)]$ (Beachten Sie hier, dass es kein Prädikat „gerade“ gibt. Da jede gerade Zahl durch 2 teilbar ist, können wir stattdessen das Prädikat „kann als eine Zahl addiert mit sich selber dargestellt werden“ formalisieren.)
- c) $((x + x) < ((y + y) + y) \vee (x + x) = ((y + y) + y))$

Es gibt natürlich jeweils auch Varianten der genannten Lösungen.

Aufgabe 9.2 Geben Sie zu folgenden Formeln, soweit möglich, jeweils ein Modell und ein Gegenbeispiel an. Diese Interpretationen sollen jeweils vollständig als formale Objekte der Form $\langle\langle D, F_D, P_D, K_D \rangle, \Phi, I\rangle$ spezifiziert werden.

- a) $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \wedge \neg(\exists y)(\forall x)R(x, y)$
- b) $(P(a) \wedge (\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \supset P(f(x, y))]) \supset (\forall x)P(f(x, x))$
- c) $(\forall x)Q(x, y) \supset (\forall y)(\exists z)(Q(x, z) \wedge Q(z, y))$

Lösung

- a) Modell: $\mathcal{J} = \langle\langle\{\omega\}, \{\}, \{<\}, \{\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(R) = <$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$. $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$ ist offensichtlich wahr unter \mathcal{J} , da es zu jeder natürlichen Zahl eine größere gibt. Umgekehrt gibt es keine natürliche Zahl, sodass alle natürlichen Zahlen kleiner als sie sind (da ansonsten die Zahl kleiner als sie selber sein müsste!), d.h. $(\exists y)(\forall x)R(x, y)$ ist falsch und $\neg(\exists y)(\forall x)R(x, y)$ daher wahr.

Gegenbeispiel: $\mathcal{J} = \langle\langle\{0, 1\}, \{\}, \{S\}, \{\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(R) = S$, wobei $S(0, 0) = \mathbf{t}$, $S(0, 1) = \mathbf{f}$, $S(1, 0) = \mathbf{f}$ und $S(1, 1) = \mathbf{f}$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$. Hier ist $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$ (und damit auch die ganze Formel) falsch, da es für $x = 1$ kein y gibt, sodass $R(x, y)$ gilt.

- b) Modell: $\mathcal{J} = \langle\langle\{\omega\}, \{+\}, \{S\}, \{0\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(f) = +$, $\Phi(P) = S$, wobei $S(x) = \mathbf{t}$ genau dann, wenn x gerade, $\Phi(a) = 0$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$. Die Formel ist unter \mathcal{J} wahr, denn $P(a)$ ist wahr (da 0 eine gerade Zahl ist), $(\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \supset P(f(x, y))]$ ist wahr, da die Summe von zwei geraden Zahlen wiederum eine gerade Zahl ist, und $(\forall x)P(f(x, x))$ ist wahr, da jede Zahl zu sich selber addiert (d.h. mit 2 multipliziert) ebenfalls eine gerade Zahl ist.

Gegenbeispiel: $\mathcal{J} = \langle\langle\{\omega\}, \{+\}, \{S'\}, \{0\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(f) = +$, $\Phi(P) = S'$, wobei $S'(x) = \mathbf{t}$ genau dann, wenn $x = 0$ oder x durch 4 teilbar ist, $\Phi(a) = 0$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$.

Die Formel ist unter \mathcal{J} falsch: $(P(a) \wedge (\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \supset P(f(x, y))])$ ist wahr mit einer ähnlichen Begründung wie zuvor (die Summe von zwei durch 4 teilbaren Zahlen ist wiederum durch 4 teilbar), aber $(\forall x)P(f(x, x))$ ist falsch: so ist etwa für $x = 3$ $x + x = 6$, also nicht durch 4 teilbar.

- c) Modell: $\mathcal{J} = \langle \{0, 1\}, \{\}, \{S\}, \{\}, \Phi, I \rangle$, mit $\Phi(Q) = S$, wobei $S(0, 0) = \mathbf{f}$, $S(0, 1) = \mathbf{t}$, $S(1, 0) = \mathbf{f}$ und $S(1, 1) = \mathbf{t}$, $I(x) = 0$ und $I(y) = 0$ (beachten Sie, dass diese Variablenbelegungen nur für die freien Vorkommnisse von x und y gelten!) Unter dieser Interpretation ist die Formel wahr, da $(\forall x)Q(x, y)$ falsch ist.

Gegenbeispiel: $\mathcal{J} = \langle \{0, 1\}, \{\}, \{S'\}, \{\}, \Phi, I \rangle$, mit $\Phi(Q) = S'$, wobei $S'(0, 0) = \mathbf{f}$, $S'(0, 1) = \mathbf{t}$, $S'(1, 0) = \mathbf{f}$ und $S'(1, 1) = \mathbf{t}$, $I(x) = 0$ und $I(y) = 1$ (auch hier gelten die Variablenbelegungen nur für die freien Vorkommnisse von x und y). Unter dieser Interpretation ist die Formel falsch, da zwar $(\forall x)Q(x, y)$ wahr ist, aber nicht $(\forall y)(\exists z)(Q(x, z) \wedge Q(z, y))$ (da für kein z gilt, dass $Q(z, y)$ für alle y gilt).

Aufgabe 9.3 Beweisen Sie unter Verwendung von Satz 4.21 (Skriptum S. 146) mit semantischen Tableaux, dass $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)] =_{\text{PL}} (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)]$.

Hinweis: Geben Sie *zwei* geschlossene Tableaux an – je eines für die beiden involvierten Konsequenzbehauptungen. Markieren Sie dabei alle auftretenden γ - und δ -Formeln als solche.

Hinweis für Tutoren: Es ist natürlich möglich bzw. sinnvoll die beiden Tableaux von zwei verschiedenen ÜbungsteilnehmerInnen vorrechnen zu lassen.

Lösung Laut Satz 4.21 genügt es die folgenden beiden Konsequenzbehauptungen zu zeigen:

1. $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)] \models (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)]$
2. $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)] \models (\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)]$

Wir zeigen zunächst $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)] \models (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)]$:

(1)	$\mathbf{t} : (\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)]$	Annahme (γ)
(2)	$\mathbf{f} : (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)]$	Annahme (δ)
(3)	$\mathbf{f} : (\forall y)[P(a, y) \supset Q(a)]$	von 2 (δ)
(4)	$\mathbf{f} : P(a, b) \supset Q(a)$	von 3
(5)	$\mathbf{t} : P(a, b)$	von 4
(6)	$\mathbf{f} : Q(a)$	von 4
(7)	$\mathbf{t} : (\exists y)P(a, y) \supset Q(a)$	von 1
(8)	$\mathbf{f} : (\exists y)P(a, y)$ von 7 (γ)	(9) $\mathbf{t} : Q(a)$ von 7
(10)	$\mathbf{f} : P(a, b)$ von 8	\times Wid.: 6/9
	\times Wid.: 5/10	

Schließlich zeigen wir noch $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)] \models (\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)]$:

(1)	$\mathbf{t} : (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \supset Q(x)]$	Annahme (γ)
(2)	$\mathbf{f} : (\forall x)[(\exists y)P(x, y) \supset Q(x)]$	Annahme (δ)
(3)	$\mathbf{f} : (\exists y)P(a, y) \supset Q(a)$	von 2
(4)	$\mathbf{t} : (\exists y)P(a, y)$	von 3 (δ)
(5)	$\mathbf{f} : Q(a)$	von 3
(6)	$\mathbf{t} : P(a, b)$	von 4
(7)	$\mathbf{t} : (\forall y)[P(a, y) \supset Q(a)]$	von 1
(8)	$\mathbf{t} : P(a, b) \supset Q(a)$	von 7
(9)	$\mathbf{f} : P(a, b)$ von 8	(10) $\mathbf{t} : Q(a)$ von 8
(10)	\times Wid.: 6/9	\times Wid.: 5/10

Man beachte, dass bei der Analyse der δ -Formeln jeweils neue Parameter einzuführen sind, die dann bei der Analyse von γ -Formeln wieder verwendet werden.

Aufgabe 9.4 *Satz:* In jeder seriellen, euklidischen Relation gibt es symmetrische Elemente.

Genauer: Zeigen Sie $ser, eukl \models syEl$, wobei:

$$\begin{aligned} ser &= (\forall x)(\exists y)R(x, y), \\ eukl &= (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x, y) \wedge R(x, z)) \supset R(y, z)], \\ syEl &= (\exists x)(\exists y)[R(x, y) \wedge R(y, x)]. \end{aligned}$$

- a) Verwenden Sie den Tableau-Kalkül um den Satz zu beweisen. Markieren Sie dabei alle auftretenden γ - und δ -Formeln als solche.
- b) *Zusatzbeispiel* – muss nicht beantwortet werden. Eine begründete korrekte Antwort bringt aber (in Verbindung mit 9.4 a) einen Zusatzpunkt:
Geben Sie ein Beispiel einer Relation, die euklidisch ist, aber in der $syEl$ nicht gilt.

Lösung

- a) Folgendes Tableau zeigt, dass es keine Interpretation gibt, unter der die Relation R reflexiv und euklidisch ist, aber dennoch keine symmetrischen Elemente aufweist:

(1)	$\mathbf{t} : (\forall x)(\exists y)R(x, y)$		Annahme (γ)
(2)	$\mathbf{t} : (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x, y) \wedge R(x, z)) \supset R(y, z)]$		Annahme (γ)
(3)	$\mathbf{f} : (\exists x)(\exists y)[R(x, y) \wedge R(y, x)]$		Annahme (γ)
(4)	$\mathbf{t} : (\exists y)R(a, y)$		von 1 (δ)
(5)	$\mathbf{t} : R(a, b)$		von 4
(6)	$\mathbf{t} : (\forall y)(\forall z)[(R(a, y) \wedge R(a, z)) \supset R(y, z)]$		von 2 (γ)
(7)	$\mathbf{t} : (\forall z)[(R(a, b) \wedge R(a, z)) \supset R(b, z)]$		von 6 (γ)
(8)	$\mathbf{t} : (R(a, b) \wedge R(a, b)) \supset R(b, b)$	von 7	(10) $\mathbf{t} : R(b, b)$ von 8 (*)
(9)	$\mathbf{f} : R(a, b) \wedge R(a, b)$	von 8	
(11)	$\mathbf{f} : R(a, b)$ von 9 \times Wid.: 5/11	(12) $\mathbf{f} : R(a, b)$ von 9 \times Wid.: 5/12	
(*)			
(13)	$\mathbf{f} : (\exists y)[R(b, y) \wedge R(y, b)]$		von 3 (γ)
(14)	$\mathbf{f} : [R(b, b) \wedge R(b, b)]$		von 13
(15)	$\mathbf{f} : R(b, b)$ von 14 \times Wid.: 10/15	(16) $\mathbf{f} : R(b, b)$ von 14 \times Wid.: 10/16	

- b) Die *leere* Relation ist (trivialerweise) euklidisch, hat aber keine symmetrischen Elemente. Beachten Sie, dass der *Gegenstandsbereich* dabei (wie immer gefordert) *nicht leer* ist, sondern eben $\neg(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ gilt.

Aufgabe 9.5 Sind die folgenden Atommengen unifizierbar? Wenn ja, geben Sie einen Unifikator an, wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie nicht das Regelsystem \mathcal{UR} , sondern argumentieren Sie direkter.

- a) $\{P(a), P(b), P(x)\}$
- b) $\{P(f(a)), P(x), P(y)\}$

- c) $\{P(a), P(f(x)), P(f(y))\}$
- d) $\{P(x), P(f(x)), P(f(f(x)))\}$

Hinweis für Tutoren: Es ist nicht nach dem *allgemeinsten* Unifikator gefragt. Die Idee des Beispiels ist ein gewisses ‘Gefühl’ für Unifikation zu trainieren und die häufigsten Fehler zu vermeiden: Substituieren von Konstanten und Missachtung der Simultanität von Ersetzungen (‘Occurs Check’).

Lösung

- a) $\{P(a), P(b), P(x)\}$ ist nicht unifizierbar, da Konstanten nicht substituiert werden können.
- b) $\{P(f(a)), P(x), P(y)\}$ ist unifizierbar; ein Unifikator ist $\sigma = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow f(a)\}$.
- c) $\{P(a), P(f(x)), P(f(y))\}$ ist nicht unifizierbar, da weder Konstanten noch Funktionen substituiert werden können.
- d) $\{P(x), P(f(x)), P(f(f(x)))\}$ ist nicht unifizierbar, da bei jeder Ersetzung eines x auch alle anderen x mitersetzt werden, d.h. dass die drei Atome niemals gleich werden können.