

Theoretische Informatik und Logik

Übungsblatt 8 (SS2009)

Lösungen

Aufgabe 8.1 Verwenden Sie den Sequentialkalkül um folgende Konsequenzbehauptung entweder zu beweisen oder um ein entsprechendes Gegenbeispiel zu finden: Aus $A \supset (B \vee C)$, $\neg B \supset C$ und $\neg C \vee A$ folgt $\neg B$.

Lösung Der Richtigkeit der Konsequenzbehauptung

$$A \supset (B \vee C), \neg B \supset C, \neg C \vee A \Vdash \neg B$$

entspricht der Sequent

$$A \supset (B \vee C), \neg B \supset C, \neg C \vee A \vdash \neg B$$

Wir bilden daher einen entsprechenden Ableitungsversuch:

$$\frac{\frac{\frac{\text{Anti-Axiom}}{B \vdash A, C} \quad \neg^{-1} \quad \frac{\text{Axiom}}{A, B \vdash A}}{\neg C, B \vdash A} \quad \vee^{-1}}{\frac{\neg C \vee A, B \vdash A}{\neg C \vee A \vdash \neg B, A} \quad \neg^{-1}} \quad \vdots \quad \frac{B \vee C, \neg C \vee A \vdash \neg B}{A \supset (B \vee C), \neg C \vee A \vdash \neg B} \quad \supset^{-1}}{\frac{A \supset (B \vee C), \neg C \vee A \vdash \neg B}{A \supset (B \vee C), C, \neg C \vee A \vdash \neg B} \quad \supset^{-1}} \quad \supset^{-1} \quad \frac{A \supset (B \vee C), C, \neg C \vee A \vdash \neg B}{A \supset (B \vee C), \neg B \supset C, \neg C \vee A \vdash \neg B} \quad \supset^{-1}$$

Dem angezeigten Antiaxiom des gescheiterten Ableitungsversuchs kann man entnehmen, dass die Interpretation I , definiert durch $I(A) = \mathbf{f}$, $I(B) = \mathbf{t}$ und $I(C) = \mathbf{f}$ ein Gegenbeispiel zur Konsequenzbehauptung ist.

Aufgabe 8.2 Verwenden Sie den Tableau-Kalkül um für folgende Formeln entweder Gegenbeispiele zu finden oder deren Gültigkeit nachzuweisen.

- a) $(B \wedge (A \supset C)) \supset ((A \vee C) \wedge (\neg E \supset E))$
- b) $\neg(((D \supset A) \supset (A \vee \neg D)) \supset \neg((B \supset A) \vee (A \supset C)))$

Lösung

a) Wir konstruieren folgendes Tableau:

(1)	$\mathbf{f} : (B \wedge (A \supset C)) \supset ((A \vee C) \wedge (\neg E \supset E))$	Annahme
(2)	$\mathbf{t} : B \wedge (A \supset C)$	von 1
(3)	$\mathbf{f} : (A \vee C) \wedge (\neg E \supset E)$	von 1
(4)	$\mathbf{f} : A \vee C$	von 3
(5)	$\mathbf{f} : \neg E \supset E$	von 3
(6)	$\mathbf{t} : B$	von 2
(7)	$\mathbf{t} : A \supset C$	von 2
(8)	$\mathbf{f} : A$	von 4
(9)	$\mathbf{f} : C$	von 4
(10)	$\mathbf{f} : A$ von 7	(11) $\mathbf{t} : C$ von 7
	\uparrow	\times Wid.

Der mit \uparrow gekennzeichnete Ast kann nicht weiter expandiert werden. Da sich auf diesem Ast kein Widerspruch findet, ist die Interpretation I mit $I(A) = \mathbf{f}, I(B) = \mathbf{t}, I(C) = \mathbf{f}$ und $I(E) = \mathbf{t}$ ein Gegenmodell zur Ausgangsformel. Da E auf diesem Ast gar nicht vorkommt, ist natürlich auch die Interpretation I' mit $I'(A) = \mathbf{f}, I'(B) = \mathbf{t}, I'(C) = \mathbf{f}$ und $I'(E) = \mathbf{f}$ ein Gegenmodell zur Ausgangsformel.

b) Wir konstruieren folgendes Tableau:

(1) $\frac{\mathbf{f} : \neg(((D \supset A) \supset (A \vee \neg D)) \supset \neg((B \supset A) \vee (A \supset C)))}{\mathbf{t} : ((D \supset A) \supset (A \vee \neg D)) \supset \neg((B \supset A) \vee (A \supset C))}$	Annahme		
(2) $\frac{\mathbf{t} : ((D \supset A) \supset (A \vee \neg D)) \supset \neg((B \supset A) \vee (A \supset C))}{\mathbf{f} : (D \supset A) \supset (A \vee \neg D)}$	von 1		
(3) $\frac{\mathbf{f} : (D \supset A) \supset (A \vee \neg D)}{\mathbf{t} : D \supset A}$	von 2	(4) $\frac{\mathbf{t} : \neg((B \supset A) \vee (A \supset C))}{\mathbf{f} : (B \supset A) \vee (A \supset C)}$	von 2
(5) $\frac{\mathbf{t} : D \supset A}{\mathbf{f} : A \vee \neg D}$	von 3	(12) $\frac{\mathbf{f} : (B \supset A) \vee (A \supset C)}{\mathbf{f} : B \supset A}$	von 4
(6) $\frac{\mathbf{f} : A \vee \neg D}{\mathbf{f} : A}$	von 3	(13) $\frac{\mathbf{f} : B \supset A}{\mathbf{f} : A \supset C}$	von 12
(7) $\frac{\mathbf{f} : A}{\mathbf{f} : \neg D}$	von 6	(14) $\frac{\mathbf{f} : A \supset C}{\mathbf{t} : B}$	von 12
(8) $\frac{\mathbf{f} : \neg D}{\mathbf{t} : D}$	von 6	(15) $\frac{\mathbf{t} : B}{\mathbf{f} : A}$	von 13
(9) $\frac{\mathbf{t} : D}{\mathbf{f} : D}$	von 8	(16) $\frac{\mathbf{f} : A}{\mathbf{t} : A}$	von 13
(10) $\frac{\mathbf{f} : D}{\times \text{Wid.} \quad 9/10}$	von 5	(11) $\frac{\mathbf{t} : A}{\times \text{Wid.} \quad 7/11}$	von 5
		(17) $\frac{\mathbf{t} : A}{\mathbf{f} : C}$	von 14
		(18) $\frac{\mathbf{f} : C}{\times \text{Wid.} \quad 16/17}$	von 14

Das Tableau ist geschlossen, daher ist die Formel gültig.

Aufgabe 8.3 Zeigen Sie mittels Resolution, dass die atomare Formel A eine logische Konsequenz der Formeln $\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A$, $\neg E \equiv D$, $E \supset (E \wedge C)$ und $\neg C$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Verwenden Sie das Deduktionstheorem (bzw. Folgerung 3.32) um das Problem auf einen Gültigkeits- bzw. Unerfüllbarkeitsnachweis für eine einzige Formel zu reduzieren.
- Verwenden Sie eine möglichst günstige Transformation in KNF um eine entsprechende Klauselmengemenge zu erzeugen.
- Finden Sie eine entsprechende Resolutionswiderlegung.

Lösung

- Aus dem Deduktionstheorem folgt, dass $\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A$, $\neg E \equiv D$, $E \supset (E \wedge C)$, $\neg C \models A$ genau dann der Fall ist, wenn die Formel

$$\neg(((E \vee C) \wedge D) \supset A) \supset ((\neg E \equiv D) \supset ((E \supset (E \wedge C)) \supset (\neg C \supset A)))$$

bzw. die Formel

$$F = (((\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A) \wedge (\neg E \equiv D) \wedge (E \supset (E \wedge C))) \wedge \neg C) \supset A$$

gültig ist. Da Resolution ein indirektes Beweisverfahren ist, weisen wir die Unerfüllbarkeit von

$$\begin{aligned} \neg F &= \neg(((\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A) \wedge (\neg E \equiv D) \wedge (E \supset (E \wedge C))) \wedge \neg C) \supset A \\ &= \neg(\neg(\neg(\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A) \wedge (\neg E \equiv D) \wedge (E \supset (E \wedge C))) \wedge \neg C) \vee A \\ &= (\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A) \wedge (\neg E \equiv D) \wedge (E \supset (E \wedge C)) \wedge \neg C \wedge \neg A \end{aligned}$$

nach.

- Wegen der Form von $\neg F$ kann man die einzelnen Formeln dieser Konjunktion separat in KNF transformieren:

- $\text{KNF}(\neg((E \vee C) \wedge D) \supset A) = \text{KNF}(\neg\neg((E \vee C) \wedge D) \vee A) = \text{KNF}(((E \vee C) \wedge D) \vee A) = (E \vee C \vee A) \wedge (D \vee A)$.
- $\text{KNF}(\neg E \equiv D) = \text{KNF}((\neg E \supset D) \wedge (D \supset \neg E)) = \text{KNF}((\neg\neg E \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg E)) = (E \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg E)$
- $\text{KNF}(E \supset (E \wedge C)) = \text{KNF}(\neg E \vee (E \wedge C)) = (\neg E \vee E) \wedge (\neg E \vee C)$
- $\text{KNF}(\neg C) = \neg C$
- $\text{KNF}(\neg A) = \neg A$

Wir erhalten daher folgende Klauselmengen:

$$\mathcal{K} = \{\{A, E, C\}, \{A, D\}, \{E, D\}, \{\neg E, \neg D\}, \{\neg E, E\}, \{\neg E, C\}, \{\neg C\}, \{\neg A\}\}$$

- c) Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit von \mathcal{K} (und damit der Richtigkeit der ursprünglichen Konsequenzbehauptung) dient, z.E., folgende Resolutionswiderlegung:

1. $\{A, E, C\} \in \mathcal{K}$
2. $\{\neg A\} \in \mathcal{K}$
3. $\{E, C\}$ Resolvente von 1, 2
4. $\{\neg E, C\} \in \mathcal{K}$
5. $\{C\}$ Resolvente von 3, 4
6. $\{\neg C\} \in \mathcal{K}$
7. $\{\}$ Resolvente von 5, 6

Aufgabe 8.4 Verwenden Sie Resolution um für folgende Klauselmengen jeweils zu testen, ob sie unerfüllbar sind:

- a) $\mathcal{K} = \{\{\neg B, C, D\}, \{B, \neg D, E\}, \{B, C, D\}, \{D, E\}, \{B, \neg C, E\}, \{\neg D\}, \{\neg B, \neg C, E\}, \{\neg C, D\}\}$
 b) $\mathcal{K}' = \{\{B, C, D\}, \{D, E\}, \{B, C, \neg B\}, \{B, \neg C, E\}, \{\neg B, C, D\}, \{\neg B, \neg C, E\}, \{B, \neg D, E\}\}$

Berücksichtigen Sie dabei, dass Tautologien und subsumierte Resolventen redundant sind.

Lösung

- a) Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit von \mathcal{K} dient, z.B., folgende Resolutionswiderlegung:

1. $\{\neg B, C, D\} \in \mathcal{K}$
2. $\{B, C, D\} \in \mathcal{K}$
3. $\{C, D\}$ Resolvente von 1, 2
4. $\{\neg C, D\} \in \mathcal{K}$
5. $\{D\}$ Resolvente von 3, 4
6. $\{\neg D\} \in \mathcal{K}$
7. $\{\}$ Resolvente von 5, 6

Da die leere Klausel aus \mathcal{K} abgeleitet werden konnte, ist \mathcal{K} damit als *unerfüllbar* nachgewiesen.

- b) Wir bilden systematisch („Generationen-weise“) alle nicht-redundanten Resolventen:

- Erste Generation:
1. $\{B, C, D\} \in \mathcal{K}'$
 2. $\{D, E\} \in \mathcal{K}'$
 3. $\{B, \neg C, E\} \in \mathcal{K}'$
 4. $\{\neg B, C, D\} \in \mathcal{K}'$
 5. $\{\neg B, \neg C, E\} \in \mathcal{K}'$
 6. $\{B, \neg D, E\} \in \mathcal{K}'$

Die Klausel $\{B, C, \neg B\} \in \mathcal{K}'$ ist eine Tautologie und wurde daher entfernt.

Wir bestimmen nun die neuen nicht-tautologischen Klauseln der „zweiten Generation“, d.h. diejenigen Klauseln, die aus nicht-tautologischen Elternklauseln $\in \mathcal{K}'$ abgeleitet werden können und die selbst keine Tautologien sind:

7. $\{B, D, E\}$ Resolvente von 1 und 3
8. $\{C, D\}$ Resolvente von 1 und 4
9. $\{B, C, E\}$ Resolvente von 1 und 6
10. $\{B, E\}$ Resolvente von 2 und 6
11. $\{\neg C, E\}$ Resolvente von 3 und 5
12. $\{\neg B, D, E\}$ Resolvente von 4 und 5
13. $\{\neg C, \neg D, E\}$ Resolvente von 5 und 6

Folgende Klauseln werden von anderen Klauseln subsumiert:

1 von 8, 3 von 10, 4 von 8, 5 von 11, 6 von 10, 7 von 10, 9 von 10, 12 von 2, 13 von 11.

Nach Elimination dieser redundanten Klauseln verbleiben folgende Klauseln.

Erste und zweite Generation:	2.	$\{D, E\}$
	8.	$\{C, D\}$
	10.	$\{B, E\}$
	11.	$\{\neg C, E\}$

Es lässt sich nun (in der „dritten Generation“) keine neue und nicht-tautologische Resolvente mehr bilden. Die leere Klausel ist also nicht aus \mathcal{K}' ableitbar. Wegen der Widerlegungs-vollständigkeit des Resolutionskalküls ist \mathcal{K}' damit als *erfüllbar* nachgewiesen.

Aufgabe 8.5 Es sei \mathbb{A} eine Modellstruktur über einem Gegenstandsbereich von Personen, in der das Gleichheitsprädikat und ein zweistelliges Prädikat ‘... vertraut ...’ definiert ist. Das Prädikaten-symbol zu ‘... vertraut ...’ sei $V: V(x, y)$ drückt in \mathbb{A} aus, dass die Person x der Person y vertraut. Drücken Sie folgende Aussagen mittels entsprechender prädikatenlogischer Formeln aus.

- Jemand, der sich selbst nicht vertraut, vertraut auch sonst niemandem.
- Alle vertrauen sich selbst, aber niemand vertraut allen.
- Es gibt jemanden, dem alle *anderen* vertrauen.
- Es gibt mindestens zwei Personen, die sich gegenseitig vertrauen.

Hinweis: Die Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen ist selten eindeutig. Es genügt gegebenenfalls jeweils eine Variante anzugeben und zu erklären, welche zusätzlichen Annahmen Sie getroffen haben.

Lösung

- Im allgemeinen meint man mit dieser Aussage, dass für *alle* Personen x folgendes gilt: Wenn x sich selbst nicht vertraut, dann gibt es niemanden, dem x vertraut. Eine entsprechende Formel lautet: $(\forall x)(\neg V(x, x) \supset \neg(\exists y)V(x, y))$. Äquivalent dazu: $(\forall x)(\neg V(x, x) \supset (\forall y)\neg V(x, y))$. Wenn man ‘jemand’ als ‘es gibt jemand’ lesen will, dann müsste man die Aussage als (z.B.) folgende existenz-quantifizierte Konjunktion darstellen: $(\exists x)(\neg V(x, x) \wedge \neg(\exists y)V(x, y))$.
- $(\forall x)V(x, x) \wedge \neg(\exists y)(\forall z)V(y, z)$ bzw. $(\forall x)V(x, x) \wedge (\forall y)(\exists z)\neg V(y, z)$.
- Es wird mit dieser Aussage nicht behauptet, aber auch nicht explizit verneint, dass die Person, der alle anderen vertrauen, auch sich selbst vertraut. Daher lautet eine entsprechende Formel: $(\exists x)(\forall y)(x \neq y \supset V(y, x))$ bzw. $(\exists x)(\forall y)(x = y \vee V(y, x))$. Beachten Sie außerdem, dass $(\exists x)(\forall y)(x \neq y \supset V(x, y))$ einer anderen Aussage entspricht, nämlich: ‘Es gibt jemanden, der allen anderen vertraut.’
- $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge V(x, y) \wedge V(y, x))$. Beachten Sie: Die Formel $(\exists x)(\exists y)(V(x, y) \wedge V(y, x))$ drückt die betroffene Aussage *nicht* aus, denn sie ist bereits wahr, wenn es eine Person gibt, die sich selbst vertraut.