

Beispiel 453 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 03.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

Man berechne:

$$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$$

2 Theoretische Grundlagen - partielle Integration

Wenn $u(x)$ und $v(x)$ in $[a; b]$ stetig differenzierbar sind, so gilt dort:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

3 Lösung des Beispiels

$$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} &\Rightarrow & u = \ln x \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\ln x}} = (\ln x)^{-0.5} &\Rightarrow & v' = -\frac{1}{2}(\ln x)^{-1.5} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Nun die Ausführung:

$$\begin{aligned} \ln x \frac{1}{\sqrt{\ln x}} - \int_1^e \ln x \left(-\frac{1}{2}\right) (\ln x)^{-1.5} dx &= \\ \ln x + \frac{1}{2} + \int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x x}} dx & \end{aligned}$$

Abschliessende Berechnungen:

$$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}} = \ln x + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}} \quad \Rightarrow \quad \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}$$