Runde 6, Beispiel 37

LVA 118.181, Übungsrunde 6, 24.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 22.11.2006

1 Angabe

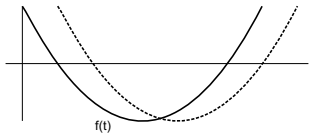
Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:
(a) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$
(b) $F(s) = \frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$
Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heaviside'schen Sprungfunktion.

2 Theoretische Grundlagen

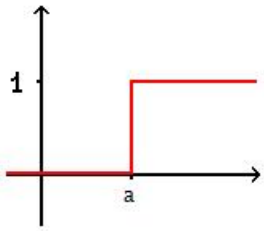
2.1 Urbilder von $\mathcal{L}$-transformierten finden

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{d}{ds}F(s)\}$$

2.2 Dämpfung und Verschiebung bzw. Heaviside-Funktion



$$\mathcal{L}\{e^{-\mathbf{a}t} \cdot f(t)\} = F(s+a), \qquad f(t) : [0, \infty] \to \mathbb{R}, a > 0$$
$$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot u(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$$
$$u(t) \text{ ... Heavisidische Sprungfunktion}$$



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 a

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ln(s^2+1)\}$$
$$t \cdot f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{d}{ds}ln(s^2+1)\} = -2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = -2\cos(t) \Rightarrow f_1(t) = -\frac{2}{t}\cos(t)$$

$$f_2(t) = -\mathcal{L}^{-1}\{ln((s-1)^2)\}$$
$$t \cdot f_2(t) = -\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{d}{ds}ln((s-1)^2)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2}\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} = 2e^t \Rightarrow f_2(t) = \frac{2}{t}e^t$$

$$\mathbf{f(t) = \frac{2}{t}(e^t - \cos(t))}$$

Überprüfung mit MATLAB:

Listing 1: Inverse L-Trafo mit MATLAB

```
>> syms s
>> F=log((s^2+1)/(s-1)^2);
>> f=ilaplace(F)

f =

2*(exp(t)-cos(t))/t


>> laplace(f)

ans =

-2*log(s-1)+log(s^2+1) %'''Probe OK'''
```

3.2 b

$$F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-4s}}{s} = 1/s \cdot e^{-2s} - 1/s \cdot e^{-4s}$$
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/s \cdot e^{-2s}\} - \mathcal{L}^{-1}\{1/s \cdot e^{-4s}\} = \mathbf{u(t-2) - u(t-4)}$$

wobei: $u(t)$ die Heaviside'sche Sprungfunktion ist.
Überprüfung mit MATLAB:

Listing 2: Inverse L-Trafo mit MATLAB

```
>> syms s
  >> F=(exp(-2*s) - exp(-4*s))/s;
  >> f=ilaplace(F)

  f =

  heaviside(t-2)-heaviside(t-4) %'''ACHTUNG!!!'''


  >> laplace(f)

  ans =

  exp(-2*s)/s-exp(-4*s)/s %'''Probe OK!
```