1. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

   Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cup C), \mathbb{P}(B \cup C), \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

2. Zeigen Sie: wenn die drei Ereignisse A, B und C unabhängig sind, dann auch A^C, B^C und C^C.

3. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der ersten beiden Augenzahlen 4 ist, wenn die Summe aus zweiter und dritter Augenzahl 8 ist.

4. Die symmetrische Differenz von zwei Mengen ("exklusives Oder") ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   Drücken Sie $\mathbb{P}(A \triangle B)$ und $\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C)$ durch die Wahrscheinlichkeiten von Durchschnitten aus (Zusatzaufgabe: raten Sie, wie die Formel für n Mengen aussieht).

5. Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe durch drei teilbar ist.

6. Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der weißen Kugeln unter den gezogenen. Bestimmen Sie die Verteilung (i.e., die Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X (einige der fraglichen Wahrscheinlichkeiten wurden schon in der Vorlesung berechnet).

7. Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal *mit* Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln

   (a) 3

   (b) 2

   weiße sind.

2. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. X hat die Dichte
$$f(x) = ax(1-x)[0 \leq x \leq 1].$$
Bestimmen Sie a, die Verteilungsfunktion von X und die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 1/4 und 3/4 liegt.

2. in einer Urne liegen jeweils k Kugeln mit der Zahl k, $k = 1, \ldots, 10$. Eine Kugel wird gezogen, X sei die Zahl, die darauf steht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X.

3. ein Würfel wird dreimal geworfen, $X \leq Y \leq Z$ seien die der Größe nach geordneten Augenzahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

4. Nehmen Sie im Blutgruppenbeispiel aus der Vorlesung an, dass Mutter und Kind beide Blutgruppe AB haben. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Möglichkeiten für die (unbekannte) Blutgruppe des Vaters.

5. Von einer Krankheit sind 2% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis, bei einem Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.01.
   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.
   (b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrschinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

6. Beim norddeutschen Bingo ("die Umweltlotterie") werden 22 Zahlen aus $\{1, \ldots 75\}$ ohne Zurücklegen gezogen. Die Wettscheine sind Quadrate mit 5×5 Feldern. In der ersten Spalte stehen Zahlen zwischen 1 und 15, in der zweiten Zahlen von 16 bis 30 usw.
   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keine Zahlen aus der ersten Spalte (also zwischen 1 und 15) gezogen werden.
   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 Zahlen aus der ersten Spalte gezogen werden.

7. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

3. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. X sei $N(3, 16)$-verteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 2), \mathbb{P}(X > 6), \mathbb{P}(|X| \leq 1)$.

2. Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei die kleinste der drei Augenzahlen, Y die größte. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die Randverteilungen von X und Y.

3. Ein fairer Würfel wird zehnmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Sechsen größer als zwei ist.

4. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty, p = \lambda/n$ und Zufallsvariable $X_n \sim B(n,p)$ und $Y \sim P(\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Y = x), x = 0, 1, \ldots$$

   gilt.

5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 60 Würfen von zwei Würfeln mehr als 2 Doppelsechsen auftreten. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der für eine Poissonverteilung mit $\lambda = 10/6$.

6. X sei exponentialverteilt mit $\lambda = 0.1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 10)$, $\mathbb{P}(|X-12| < 6)$, und einen Wert x mit $\mathbb{P}(X \leq x) = 1/2$.

7. Das Paradox des Chevalier de Méré: der Chevalier de Méré wandte sich mit folgender Frage an Blaise Pascal, einen der führenden Mathematiker seiner Zeit: eine Wette zu gleichen Chancen darauf, bei 4 Würfen mit einem Würfel keine Sechs zu erzielen, ist profitabel (d.h., das entsprechende Ereignis hat Wahrscheinlichkeit $> 1/2$), wie die Erfahrung zeigt. Warum ist die Wette auf "keine Doppelsechs" in 24 Würfen von zwei Würfeln unprofitabel, schließlich ist ja $24/36 = 4/6$?

   Bestimmen Sie beide Wahrscheinlichkeiten.

4. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Die logarithmische Normalverteilung ($LN(\mu, \sigma^2)$): X sei normalverteilt mit Mittel μ und Varianz σ^2. Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

2. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{wenn } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie c, die Randverteilungen von X und Y und

$$\mathbb{P}(X > 1/3 | Y = 1/3).$$

3. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig mit der Verteilungsfunktion F_X, $U = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von U und V. Bestimmen Sie auch ihre Dichten für den Spezialfall $X \sim U(0, 1)$.

4. In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die Randverteilung von X.

5. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$.

6. X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ, Y gammaverteilt mit Parametern n und 1 ($\lambda > 0$, $n \geq 1$). Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(Y \leq \lambda) = \mathbb{P}(X \geq n).$$

7. Es sei $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B_1(k, n - k + 1)$ ($n, k > 0, 0 < p < 1$). Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(Y \leq p) = \mathbb{P}(X \geq k).$$

5. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ seien unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung von $S = X + Y$.

2. $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ seien unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung von $Q = X/Y$ (Fleißaufgabe: wie sieht die gemeinsame Verteilung von Q und $S = X + Y$ aus?).

3. $X \sim B(n, p)$ und $Y \sim B(m, p)$ seien unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

4. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Poissonvertilung $P(\lambda)$.

5. Die Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion aus Beispiel 7 der 2. Übung. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

6. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

7. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

6. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Bestimmen Sie die Varianz der Poissonverteilung $P(\lambda)$.

2. Die Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion aus Beispiel 7 der 2. Übung. Bestimmen Sie $\mathbb{V}(X)$.

3. Bestimmen Sie die Varianz der Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

4. X sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Bestimmen Sie
$$M_n = \mathbb{E}(X^n)$$
für $n \in \mathbb{N}$.

5. Die Funktion
$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{XT})$$
heißt die Momentenerzeugende (Funktion) von X. Bestimmen Sie die Momentenerzeugende für eine Gammaverteilte Zufallsvariable.

6. X sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Bestimmen Sie mit der Ungleichung von Chebychev c so, dass
$$\mathbb{P}(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 0.95$$
gilt (es soll also die Wahrscheinlichkeit, dass sich X von μ um mehr als $c\sigma$ unterscheidet, höchstens 5% betragen).

7. Bestimmen Sie die Momentenerzeugende der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$.

7. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Bestimmen Sie Näherungen für
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$
durch Simulation mit $N = 10000, 100000, 1000000$ Versuchen (für Eifrige: gern auch mehr, und vielleicht eine Fehlerabschätzung?).

2. Ein Weg zur Erzeugung von (näherungsweise) standardnormalverteilten Zufallszahlen: $U_1, \ldots, U_{12}$ seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dann ist $X = U_1 + \ldots + U_{12} - 6$ näherungsweise standardnormalverteilt.

3. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 100 Sechsen erhält, mindestens 0.9 beträgt (mit dem zentralen Grenzwertsatz sollten Sie zu einer quadratischen Gleichung für n oder $\sqrt{n}$ kommen)?

4. Die Frage nach der Anzahl der Würfe, die nötig sind, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten, kann man auch so lösen: diese Anzahl ist negativ binomialverteilt, und diese negative Binomialverteilung kann als Summe von unabhängigen geometrischen verteilten Zufallsvariablen (jeweils die Wartezeit bis zur nächsten Sechs) dargestellt werden. Wenden Sie auf diese Summe den zentralen Grenzwertsatz an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem vorigen Beispiel.

5. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(40, 1/2)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 11]$, $[X \leq 14]$, $[X \leq 17]$ und $[X \leq 20]$
   (a) exakt,
   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,
   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

6. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(48, 1/4)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 5]$, $[X \leq 9]$, $[X \leq 12]$, $[X \leq 15]$ und $[X \leq 18]$
   (a) exakt,
   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,
   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

7. Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?

8. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen
$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$
Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \setminus B), \mathbb{P}((A \cup B) \cap C), \mathbb{P}((A \cup B) \setminus C)$.

2. In einer Urne befinden sich eine blaue, eine grüne und eine rote Kugel. Es wird solange gezogen, bis die rote Kugel gezogen wird. Wenn die blaue Kugel gezogen wird, wird sie beiseite gelegt, wenn die gr:une Kugel gezogen wird, wird sie in die Urne zurückgelegt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Ziehungen.

3. Pólyas Urnenschema: In einer Urne befinden sich zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen, und nach jeder Ziehung werden die gezogene Kugel und noch eine weitere der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der weißen Kugeln unter den gezogenen, ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

4. Fortsetzing: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite bzw. dritte gezogene Kugel weiß ist.

5. X und Y haben die gemeinsame Dichte
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$
Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y und den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

6. Wie oft muss man einen fairen Würfel werfen, damit der Mittelwert $\bar{X}_n$ der Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeit 0.99 um weniger als 0.1 von 3.5 abweicht?

7. Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \ldots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

   (a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden
   $$K_n = K_0 X_1 \ldots X_n$$
   ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(K_n).$$

(c) Wie sind $q_1, \ldots, q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

9. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Eine faire Münze wird wiederholt geworfen, $X(t)$ sei die Binärzahl, die aus den drei Münzwürfen mit Indizes t, $t+1$, $t+2$ gebildet wird (zu der Münzwurffolge

   11010111101000...

   gehört

   6,5,2,5,3,7,7,6,5,2,4,0,...). Überlegen Sie, dass $X(t)$ eine Markovkette bildet, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

2. In einer Urne liegen N Kugeln, die weiß oder schwarz sein können. In jedem Zug wird eine der N Kugeln zufällig ausgewählt und ihre Farbe geändert (aus schwarz wird weiß und umgekehrt). Überlegen Sie, dass die Anzahl $X(t)$ von schwarzen Kugeln zum Zeitpunkt t eine Markovkette bildet, und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

3. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit 3 Zuständen ist

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die t-stufige Übergangsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

4. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

6. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

7. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

10. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal die Folge "111" erscheint (vgl. Bsp. 1 der 9. Übung). Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Würfen, die dazu nötig sind.

2. Rechnen Sie das vorige Beispiel für die Folge "011".

   Verifizieren Sie die folgende Regel: t sei die mittlere Zeit bis die Folge $x_1 \dots x_k$ beobachtet wird. Wir bestimmen eine Binärzahl $A = a_1 a_2 \dots a_k$ mit
   $$a_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_j = a_{j+i-1} \text{ für } j = 1, \dots, k+1-i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Dann ist $t = 2A$.

3. Brad und Angelina spielen folgendes Spiel: eine Münze wird so lange geworfen, bis entweder "111" oder "011" erscheint. Im ersten Fall gewinnt Brad, im zweiten Angelina. Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten und die mittlere Spieldauer (wenn Sie die Markovkette aus der letzten Übung verwenden, müssen Sie zu ihrem Ergebnis noch 3 addieren, weil es drei Würfe braucht, bis einer der Anfangszustände erreicht wird).

4. Bestimmen Sie zu Beispiel 2 der letzten Übung die stationäre Verteilung.

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen und die mittlere Absorptionszeit.

6. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen.

7. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittlere Absorptionszeit.

11. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung: X sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie
$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$
(wenn X als Wartezeit interpretiert wird, dann bedeutet das, dass die bedingte Verteilung der restlichen Wartezeit nicht davon abhängt, wie lange schon gewartet wurde; die Exponentialverteilung "vergisst" also, wie lange sie uns schon hat warten lassen).

2. Zeigen Sie, dass eine Markovkette in diskreter Zeit mit zwei Zuständen genau dann als Diskretisierung einer Markovkette in stetiger Zeit erhalten werden kann (d.h. es gibt eine Markovkette Y in stetiger Zeit mit $X(n) = Y(n)$), wenn die Spur ihrer Übergangsmatrix P größer als 1 ist.

3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

4. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

5. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

6. Eine Markovkette mit fünf Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Absorptionswahrscheinlichkeiten im absorbierenden Zustand 1.

7. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die mittleren Absorptionszeiten.

12. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Gegeben Sei die Verteilung

1	2	3	4	5
0.1	0.4	0.2	0.1	0.2

   Bestimmen sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

2. Bestimmen Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ explizite Ausdrücke für $H^*(P)$ (Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeiten absteigend geordnet sind).

3. Zeigen Sie, dass $H^*(P) = H(P)$ genau dann gilt, wenn alle p_i von der Form 2^{-k} sind. Bestimmen sie alle solchen Verteilungen für $m = 1, 2, 3, 4$.

4. Eine Markovquelle mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Entropie dieser Quelle.

5. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	1/8	1/8
2	0	1/8	1/8	0
3	0	1/16	0	1/16
4	0	1/16	0	1/16

   Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X, Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X, Y)$.

6. Gegeben Sei die Verteilung

$$P = (0.1, 0.4, 0.05, 0.2, 0.25)$$

   Bestimmen sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

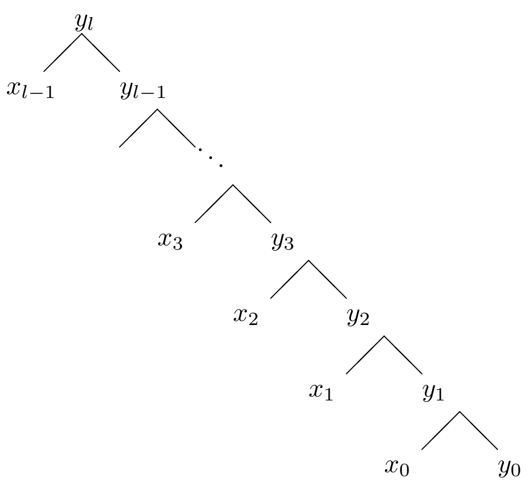
7. $(X_1, \ldots, X_4)$ seien unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 0.9$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0.1$. Bestimmen Sie $H^*(X_1, \ldots X_n)$ für $n = 1, \ldots, 4$ und vergleichen Sie mit der Entropie.

8. Gegeben Sei die Verteilung

$$P = (0.05, 0.03, 0.17, 0.4, 0.1, 0.25)$$

   Bestimmen sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

9. (f_n) seien die Fibonaccizahlen ($f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$).
   Zeigen Sie für $i \geq 1$
   $$f_i \geq \tau^{i-2},$$
   wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die positive Lösung von $\tau^2 = \tau + 1$ ist.
   In einem Huffmanbaum betrachten wir einen Pfad der Länge l:



   x_i und y_i repräsentieren die Wahrscheinlichkeiten der Knoten.
   Zeigen Sie, dass $x_0 \geq 0$, $y_i = x_{i-1} + y_{i-1}$ und $x_i \geq y_{i-1}$ gilt und dass
   $$y_i \geq f_{i+1}\, y_0.$$
   Folgern Sie daraus
   $$l \leq \log_\tau\left(\frac{1}{y_0}\right) + 1 \leq 1.5 \log_2\left(\frac{1}{y_0}\right) + 1.$$

10. In einer Urne befinden sich 5 Kugel mit Nummern 1 bis 5. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die kleinere der beiden gezogenen Zahlen, Y die größere. Bestimmen Sie $I(X, Y)$.

13. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS 17

1. $X_1, \dots, X_n$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte
$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}[0 \le x \le 1].$$
Bestimmen Sie den Momentenschätzer.

2. Fortsetzung: Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer.

3. Fortsetzung: Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für θ.

4. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung und zeigen Sie, dass er effizient ist.

5. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}[x \ge 0]$$
und zeigen Sie, dass er effizient ist.

6. Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}[x \ge 0].$$

7. Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung

   0.7 1.3 1.2 1.5 1.8 0.9 1.1 1.4 1.9 1.7

   ein 95%-Konfidenzinterval für μ.

8. Bestimmen Sie zum vorigen Beispiel ein 95%-Konfidenzintervall für σ^2.

9. Testen Sie in Beispiel 7 die Nullhypothese $\mu \le 1.0$ gegen $\mu > 1.0$.

10. Von 1000 geprüften Artikeln waren 20 defekt. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der defekten Artikel in der Produktion.

11. Gegeben sei folgende Stichprobe

    1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

    1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

    einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \mu = 1.5$ gegen die zweiseitige Alternative.

12. Testen Sie im vorigen Beispiel $H_0 : \sigma^2 \le 0.1$ gegen $H_1 : \sigma^2 > 0.1$.

13. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter λ einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$\lambda e^{-\lambda x}[x \geq 0].$$
Bestimmen Sie seinen Erwartungswert und modifizieren Sie ihn so, dass er erwartungstreu wird.

14. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter θ einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = \theta$.

15. Für eine Stichprobe aus einer Normalverteilung ist $n = 100$, $\bar{X}_n = 20.5$, $S_n^2 = 9$. Testen Sie $H_0 : \mu = 20$ gegen $H_1 : \mu > 20$.

16. Testen Sie im vorigen Beispiel gegen die zweiseitige Alternative.

17. Bei einer Umfrage werden 100 Personen befragt, 29 geben eine positive Antwort. Testen Sie $H_0 : p = 0.2$ gegen $H_1 : p > 0.2$.

18. Wie groß ist im vorigen Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, wenn $p = 0.25$ bzw. $p = 0.35$ ist?

19. Testen Sie in Beispiel 15 die Hypothese $\sigma^2 = 12$ gegen die zweiseitige Alternative.

20. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung $(n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800)$ ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

21. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung $(n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800)$ ein 95%-Konfidenzintervall für σ^2.