Beispiel 56 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7, 11.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Die Herstellung eines Produkts P untter Verwendung uweier Produktionsfaktoren A und B werde durch die Produktionsfunktion

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch $G(x_1, x_2, y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$ gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2, p_1 = 1, p_2 = 8$ und unter der Berücksichtigung der Nebenbedingung (NB), und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1, x_2, die Produktmenge y und den Unternehmergewinn G.

2 Theoretische Grundlagen: Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagranegschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion

   $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$$

   gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

   $$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \cdot \phi_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \cdot \phi_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowier der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3 Lösung des Beispiels

Zunächst vervollständigen wir G anhang gegebener Koeffizienten und formen die Nebenbedingung so um, dass wir sie für das Lagrangesches Multiplikatorverfahren verwenden können:

$$G(x_1, x_2, y) = 2y - x_1 - 8x_2$$

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} \qquad \rightarrow \qquad 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} - y = \mathbf{0}$$

Nun bilden wir die Hilfsfunktion:

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda) = 2y - x_1 - 8x_2 + \lambda \cdot (5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} - y) =$$

$$2y - x_1 - 8x_2 + \lambda \cdot 5 - \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda \cdot y$$

Schließlich wird die Hilfsfunktion partiell abgeleitet:

$$\Phi_{x_1}: \qquad -1 - \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^3}} \cdot \lambda = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 2 \cdot \sqrt{x_1^3}$$

$$\Phi_{x_2}: \qquad -8 - \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2^3}} \cdot \lambda = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 16 \cdot \sqrt{x_2^3}$$

$$\Phi_y: \qquad 2 - \lambda \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 2$$

$$\Phi_\lambda: \qquad 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} - y = 0$$

Nun setzen wir $\lambda = 2$ in Φ_{x_1} und Φ_{x_2} ein und erhalten:

$$\Phi_{x_1}: \qquad \lambda = 2 \cdot \sqrt{x_1^3} \qquad \rightarrow \qquad 2 = 2 \cdot \sqrt{x_1^3} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 1$$

$$\Phi_{x_2}: \qquad \lambda = 16 \cdot \sqrt{x_2^3} \qquad \rightarrow \qquad 2 = 16 \cdot \sqrt{x_2^3} \qquad \rightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{4}$$

Die soeben gewonnenen Werte setzen wir in Φ_λ ein:

$$\Phi_\lambda: \qquad 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} - y = 0 \qquad \rightarrow \qquad 5 - 1 - 2 - y = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = 2$$

Somit wird das Gewinnmaximum bei $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}, y = 2$ erreicht und der Gewinn dabei ist:

$$G(x_1, x_2, y) = 2y - x_1 - 8x_2 = 1$$