Runde 9, Beispiel 59

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Man zeige, daß für die Fouriermatrix F_N, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $\omega = e^{2\pi i/N}$ gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die $N \times N$-Einheitsmatrix.
Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die N-te Einheitsmatrix.
Anmerkung: Das Element in der r-ten Zeile und s-ten Spalte der Matrix $F_N \cdot \overline{F_N}$ berechnet sich durch

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(r-1)} \cdot \omega^{-k(s-1)}$$

Man unterscheide zwischen $r = s$ und $r \neq s$.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Matrix

Durch Bilden von Potenzen der Einheitswurzel

$$\omega_n = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{n}}$$

erhält man die Fourier-Matrix.

3 Lösung des Beispiels

3.1 $r = s$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k \cdot (r-1)} \cdot \omega^{-k \cdot (r-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k \cdot (r-1) - \cdot (r-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^0 = N$$

3.2 $r \neq s$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)} \cdot \omega^{-k\cdot(s-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)-\cdot(s-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot r-k-k\cdot s+k} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-s)}$$

Dabei gilt: $\omega^{r-s} := z$, wobei z eine von 1 verschiedene N-te Einheitswurzel ist ($z^N = 1$).

$$z^{N-1} + z^{N-2} + \cdots + z + 1 = \frac{z^N - 1}{z - 1} = 0$$

Beweis für $z^N = 1$ (Moivre-Formeln,n-ten Wurzeln in $\mathbb{C}$):

$z^N = \omega^{N\cdot(r-s)} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{N}\cdot N\cdot(r-s)} = e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(r-s)} = \cos(2\cdot\pi\cdot(r-s)) + i\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot(r-s)) = 1$