Ein für eine bestimmte Krankheit entwickelter Test zeigt in 99.6% der Fälle das korrekte Ergebnis, bei Erkrankten und bei nicht Erkrankten. Man nimmt an, dass ca. 0.5% der Bevölkerung diese Krankheit hat.

[1.5] (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einer zufällig ausgewählte Person der Test positiv?

[1.5] (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Person, deren Test positiv ist, tatsächlich erkrankt?

[1] (c) Geben Sie eine Erklärung für die (unerwartet?) kleine Wahrscheinlichkeit von (b).

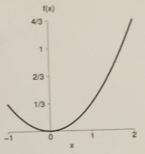
[1] (d) Wie lautet für (b) die Odds–Form der Bayes'schen Formel? (Vgl. Skriptum S 87.)

28–1–2015

Aufgabe 3

Die Dichte einer sG X lautet wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



[1] (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

[1.5] (b) Bestimmen Sie die Varianz von X. (Hinweis: Verschiebungssatz)

[1] (c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

[1] (d) Wie kann man auf Basis von $U \sim U(0,1)$ Beobachtungen von $X \sim f$ generieren?

[0.5] (e) Wenn man $n = 100$ Beobachtungen von $X \sim f$ generiert, etwa wieviele davon sind kleiner als Null?

28–1–2015

Aufgabe 4

Die Dichte der sG X sei gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten Sie die Transformation $Y = \sqrt{X}$.

[1] (a) Wie lautet die Jacobian?

[2] (b) Bestimmen Sie mittels Transformationssatz die Dichte von Y.

[2] (c) Berechnen Sie – nach Definition oder mittels LotUS – den Erwartungswert von Y.

28–1–2015

Aufgabe 5

Die Lebensdauern von drei in Serie geschalteten Komponenten seien unabhängige Exponentialverteilungen mit $\lambda_1 = 0.03$, $\lambda_2 = 0.04$ und $\lambda_3 = 0.05$. Bestimmen Sie für die Lebensdauer X des Seriensystems:

[2] (a) die Verteilungsfunktion (mit Herleitung).

[1] (b) die Dichte. (Um welche Verteilung handelt es sich?)

[1] (c) den Erwartungswert, die Varianz und die Streuung.

[1] (d) den Median und das 90%–Quantil.

28–1–2015

Aufgabe 6

Die folgende Tabelle ist die Zusammenfassung einer Stichprobe der Größe $n = 60$ von $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ (Poisson–Verteilung):

x	0	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	1	6	10	24	9	8	2

[1] (a) Bestimmen Sie den Momentenschätzwert von λ.

[3] (a) Bestimmen Sie den ML–Schätzwert von λ (mit Herleitung).

[1] (b) Sind die beiden obigen Schätzer erwartungstreu und konsistent? (Warum?)

28–1–2015

Aufgabe 7

Aus einem Produktionslos werden $n = 1000$ Glühlampen zufällig ausgewählt und auf ihre Funktionsfähigkeit überprüft. Dabei stellt man fest, dass 19 Lampen defekt sind.

[0.5] (a) Wie lautet der (ML–) Schätzwert für den Defektanteil p?

[1] (b) Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für den Defektanteil p. (Hinweis: Nehmen Sie das Standardintervall.)

[2] (c) Läßt sich behaupten, dass der Defektanteil größer als 1.5% ist? Testen Sie dazu (mit $\alpha = 5\%$) $\mathcal{H}_0 : p = 0.015$ gegen $\mathcal{H}_1 : p > 0.015$. (Hinweis: Nehmen Sie den approximativen Test für große Stichproben; vgl. Skriptum S 303.)

[1.5] (d) Der exakte p–Wert des Tests von (c) ist 0.1789. Was bedeutet dieser Wert? Wie wird er berechnet?

Aufgabe 8

28–1–2015

Für zwei Typen von Batterien ergaben sich die folgenden Kapazitäten (in Ah):

Typ 1: 158, 162, 134, 135, 155, 146, 156

Typ 2: 208, 207, 212, 206, 211, 187, 199

Die Daten stammen aus unabhängigen Normalverteilungen: $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

[2] (a) Bestimmen Sie Schätzwerte für die Parameter.

[2] (b) Ermitteln Sie – unter der Voraussetzung $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ – ein 95%–Konfidenzintervall für die Differenz $\Delta = \mu_2 - \mu_1$ der mittleren Kapazitäten.

[1] (c) Wie lauten für (b) die (Standard) R–Commands?