Übungsrunde 3, Gruppe 2

LVA 107.369, Übungsrunde 1, Gruppe 2, 31.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 10/2006

1 1.3.4.3.

1.1 Angabe

Bestimmen Sie $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k$ für folgende Ereignisse:
(a)$A_k = \{x : 2 - 1/k < x \leq 2\}, k = 1, 2, 3, \ldots$
(b)$A_k = \{x : 2 < x \leq 2 + 1/k\}, k = 1, 2, 3, \ldots$
(c)$A_k = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/k\}, k = 1, 2, 3, \ldots$

1.2 Theorie: Axiomatische Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeiten werden als Funktionen auf Ereignissystemen definiert. Das Ereignissystem $\underline{E}$ ist eine algebraische Struktur, in der folgendes gilt:

- Zweistellige Operationen $\vee$ und $\wedge$
  - $A \vee B \quad (A, B \in E)$: Jenes Ereignis, dass sowohl A als auch B oder beide zusammen eintreten
  - $A \wedge B \quad (A, B \in E)$: Jenes Ereignis, dass sowohl A als auch B eintreten
- Einstellige Operation $^{\perp}$
  - $A^{\perp} \quad (A \in E)$: Negation von A
- o ist das minimale Element
- e ist das maximale Element
- Verband $(E, \vee, \wedge, ^{\perp})$ ist abzählbar - daher existieren zu einer Folge A_n von Ereignissen Infimum $\bigwedge_{n=1}^{a} A_n$ und Supremum $\bigvee_{n=1}^{a} A_n$.

1.3 Lösung des Beispiels

Bei **(a)** gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, woraus $\lim_{k\to\infty} 2 - \frac{1}{k} = 2$ folgt, daher ist das Infimum $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k x = 2$
Bei **(b)** gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, woraus aus $2 < x \leq 2 + 1/k$ folgt, dass das das Infimum $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k$ die leere Menge ist $(\{\})$.
Bei **(c)** gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, woraus aus $\leq x^2 + y^2 \leq 1/k$ folgt, dass $x^2 + y^2 = 0$ sein muss das das Infimum $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k$ somit $x = 0$, $y = 0$ ist.

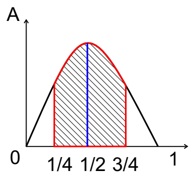
2 1.3.4.5.

2.1 Angabe

Für jedes (eindimensionale) Ereignis A sei eine Wahrscheinlichkeit wie folgt definiert:
$W(A) = \int_A f(x)\,dx \qquad \text{mit} \qquad f(x) = 6x(1-x)I_{(0,1)}(x)$
(Existiert das Integral nicht, ist $W(A)$ nicht definiert.) Wenn $A_1 = \{x : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\}$, $A_2 = \{x = \frac{1}{2}\}$ und $A_1 = \{x : 0 < x < 10\}$. Bestimmen Sie $W(A_1)$, $W(A_2)$ und $W(A_3)$.

2.2 Lösung des Beispiels

Die Angabe als $f(x) = 6x(1-x)I_{(0,1)}(x)$ definierte Funktion ist im Intervall $(0,1)$ definiert. Integriert ergibt sie $F(x) = 3x^2 - 2x^3$:



$W(A_1)$ errechnet sich einfach aus $F(x) = (3x^2 - 2x^3)|_{1/4}^{3/4}$.
$W(A_2)$ ist nach $F(x) = (3x^2 - 2x^3)|_{1/2}^{1/2}$ einfach 0.
$W(A_3)$ geht über das gegebene Intervall hinaus, weshalb wir einfach $F(x) = (3x^2 - 2x^3)|_0^1$ rechnen.

3 2.4.2.

3.1 Angabe

A, B, C sind drei Ereignisse. Ermitteln Sie Ausdrücke für die Ereignisse, daß von A, B, C (a) nur A eintritt; (b) A und C, aber nicht B eintritt; (c) zumindest eines eintritt; (d) zumindest zwei eintreten; (e) alle drei eintreten; (f) keines eintritt; (g) höchstens eines eintritt; (h) höchstens zwei eintreten; (i) genau zwei eintreten; (j) höchstens drei eintreten.

3.2 Theoretische Grundbegriffe

- Ereignis = Menge von Merkmalen
- Merkmalraum = Menge aller möglichen Merkmale
- Ereignissystem = Menge aller Ereignisse

3.3 Lösung des Beispiels

Wir gehen davon aus, dass A,B und C nur Teile des Merkmalraums M sind, d.h. es könnten noch andere Ereignisse existieren:
a) $A\backslash(B \cup C)$
b) $(A \cap C)\backslash B$
c) $A \cup B \cup C$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
e) $A \cap B \cap C$
f) $M\backslash(A \cup B \cup C)$
g) $M\backslash((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))$
h) $M\backslash(A \cap B \cap C)$
i) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))\backslash(A \cap B \cap C)$
j) M

4 2.4.6.

4.1 Angabe

Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal 'Kopf' (K) geworfen wird. Die Elemente des Merkmalraums M sind also (Z = 'Zahl') K, ZK, ZZK, $ZZZK$, ... Die W-Verteilung ordnet jedem dieser Elemente die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...
(a) Zeigen Sie, daß $W(M) = 1$.
(b) Es sei $A1 = K, ZK, ZZK, ZZZK, ZZZZK$ und $A2 = ZZZZK, ZZZZZK$. Bestimmen Sie $W(A1)$, $W(A2)$, $W(A1 \cap A2)$ und $W(A1 \cup A2)$.
(c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß der erste Kopf bei einem ungeraden Wurf kommt.
(d) Ermitteln Sie allgemein die Wahrscheinlichkeit mit der man öfter als x Mal werfen muß, bis zum ersten Mal Kopf kommt.

4.2 Theorie: Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist bestimmt durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$von Elementarereignissen. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-) Wahrscheinlichkeit $Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$$

gilt. Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$Pr[E] := \sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega].$$

4.3 Lösung des Beispiels

(a) $W(M) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + ... + (1/2)^n = (1/2) * (1 + 1/2 + (1/2)^2 + ... + (1/2)^{(n-1)}) = (1/2) * (1/(1-1/2)) = 1/2 * 2/1 = 1$
(Formel fuer geometrische Reihe: $\frac{1}{1-q}$)
(b)

- $W(A_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$
  Geometrische Reihe $\frac{1}{2^n}$
- $W(A_2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$
- $W(A1 \cap A2) = \frac{1}{32}$ (Nur $ZZZZK$ liegt in beiden Mengen)
- $W(A1 \cup A2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

(c) Wahrscheinlichkeit, dass Kopf bei einem ungeraden Wurf kommt: $W(A) = 1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + ... = 1/2 * (1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + ...) = 1/2 * (1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + ... + (1/4)^n) = 1/2 * 1/(1-1/4) = 1/2 * 4/3 = 2/3$

(d) $W(\ddot{o}fter\ als\ x) = 1 - (\sum_{i=1}^{x} \frac{1}{2^i})$

5 2.4.10.

5.1 Angabe

Zeigen Sie die Bonferroni'sche Ungleichung ($A_i, i = 1, \ldots, n$ sind Ereignisse aus einem Ereignisfeld):

$$W(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} W(A_i^c)$$

5.2 Theorie: Bonferroni-Ungleichungen

Die Bonferroni-Ungleichungen sind Formeln, die zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts bzw. der Vereinigung von Ereignissen dienen.

5.3 Lösung des Beispiels

Zunächst beobachtet man, dass stets

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}$$

gilt, und zwar nach der De Morgan'sche Regel:

$$(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c, \qquad (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Beweis für $A\ (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I}(A\ A_i)$:

$$
\begin{gathered}
x \in A\ \bigcup_{i \in I} A_i \\
\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\
\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \\
\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(\exists_{i \in I} x \in A_i) \\
\Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall_{i \in I} x \notin A_i) \\
\Leftrightarrow \forall_{i \in I}(x \in A \wedge x \notin A_i) \\
\Leftrightarrow \forall_{i \in I}(x \in A\ A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I}(A\ A_i)
\end{gathered}
$$

Der Beweis ergibt sich dann aus der Boole'schen Ungleichung

$$W(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} W(A_i)$$

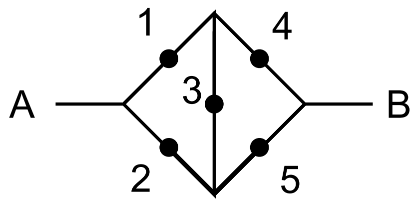
und durch die Bildung der komplementären Wahrscheinlichkeit $(W(\overline{A}) = 1 - W(A)$:

$$W(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = 1 - W(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i}) \geq 1 - \sum_{i=1} n(\overline{W(E_i)})$$

6 2.4.13.

6.1 Angabe

In der folgenden Brückenschaltung sind die Verbindungen (unabhängig voneinander) mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit $p (0 \leq p \leq 1)$ intakt. Die Schaltung ist intakt, wenn Strom von A nach B fließen kann.



E sei das Ereignis, daß die Schaltung intakt ist, und V_i das Ereignis, daß Verbindung i intakt ist.
(a) Wie lautet ein passender Merkmalraum? Wie läßt sich V_i auf Basis dieses Merkmalraums ausdrücken?
(b) Drücken Sie E mit Hilfe von $V_i, i = 1, \ldots, 5$, aus.
(c) Benützen Sie die Darstellung von (b) um $W(E)$ mit Hilfe des Additionstheorems zu berechnen.

6.2 Theore: Additionstheorem für Wahrscheinlichkeiten

In jedem Wahrscheinlichkeitsraum (M, E, W) gilt für Ereignisse $A, B, A_k \in E$
(1) $W(A \cup B) = W(A) + W(B) - W(A \cap B)$
(2) $W(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{m-1} \cdot W(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m})$

6.3 Lösung des Beispiels

(a) Man beschreibt mit 0 eine defekte und mit 1 eine intakte Verbindung, so dass ein geeigneter Merkmalraum wie folgt definiert werden kann:

$$M = \{(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) | V_i = 0, 1; i = 1, \dots, 5\}$$

Das Ereignis 'Verbindung i ist intakt' (V_i) gilt dann:

$$V_i = \{(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) | V_i = 1, V_j = 0, 1, j \neq i\} \subseteq M$$

(b) Das (zusammengesetzte) Ereignis E ('Strom fliesst von A nach B, Pfade) lässt sich auf Basis der Ereignisse V_i wie folgt ausdrücken:

$$E = (V_1 \cap V_2) \cup (V_2 \cap V_5) \cup (V_1 \cap V_4 \cap V_5) \cup (V_2 \cap V_3 \cap V_4)$$

(c) Betrachten wir zuerst die einzelnen Elemente:

- $A = (V_1 \cap V_2)$ - $A = p^2$
- $B = (V_2 \cap V_5)$ - $A = p^2$
- $C = (V_1 \cap V_3 \cap V_5)$ - $C = p^3$
- $D = (V_2 \cap V_3 \cap V_4)$ - $D = p^3$

Dazu bildet man die Summe über die Anzahl der Elemente der einzelnen Mengen minus denen der Schnitte aus zwei Mengen plus denen der Schnitte aus drei Mengen und so weiter (Siebformel):

$$W(E) = A + B + C + D - A \cap B - A \cap C - A \cap D - B \cap C - B \cap D - C \cap D +$$
$$A \cap B \cap C + +A \cap B \cap D + A \cap C \cap D + B \cap C \cap D - A \cap B \cap C \cap D$$

Einsetzen der p-Elemente (Mit dem Additionstheorem folgt (Ereignisse V_i sind nach Voraussetzung unabhängig)):

$$W(E) = p^2 + p^2 + p^3 + p^3 - p^4 - p^4 - p^4 - p^4 - p^4 + p^5 + p^5 + p^5 - p^5 = p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

Vorsichtig muss man z.B. bei $A \wedge B \wedge C$ sein, weil hier zwei mal V_1 und zwei mal V_5 vorkommen. $V_5 \wedge V_5$ bleibt V_5 und somit erhält man dabei p^5.