Runde 8, Beispiel 54

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 19.12.2006

Vielen Dank an Michael BIRSAK für seine Aufzeichnungen!

1 Angabe

Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \cos t + |\cos t|$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}\, x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}\, x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}\, x,$$

Die komplexe Darstellung:

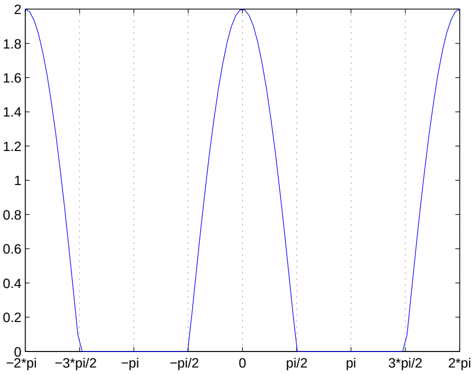
$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst betrachten wie den Graphen der Funktion $f(t) = \cos t + |\cos t|$:



Wir können $f(t)$ also im Intervall $[0, 2\pi]$ anschreiben als (2π-periodisch fortgesetzt):

$$f(t) \begin{cases} 0 < \cos(t) < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \cos(t) < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \cos(t) < 2\pi \end{cases}$$

a_0 ist zu berechnen und ergibt sich aus:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \cos(t) + |\cos(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

Wir betrachten (da Linearkombination), die Summanden für sich:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \,\mathrm{d}\, t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(t)| \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2\pi} 4 + \frac{1}{2\pi} 4 = \frac{4}{\pi}$$

Wir berechnen nun a_n (Beachte mittleres Intervall ist 0):

$$f(t) = \begin{cases} 2\cos(t), & 0 \leq \pi < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 2\cos(t), & \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cdot\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t)$$

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{u}\underbrace{\cos(t)}_{\mathrm{d}\,v}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) + \frac{1}{n}\underbrace{\sin(t)}_{x}\underbrace{\sin(t)}_{\mathrm{d}\,y}\,t = \blacklozenge$$

$$u = \cos(t), \mathrm{d}\,u = -sin(t)\,\mathrm{d}\,t;\ \mathrm{d}\,v = \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t, v = \frac{1}{n}\sin(nt)$$

$$x = \sin(t), \mathrm{d}\,y = cos(t)\,\mathrm{d}\,t;\ \mathrm{d} <= \sin(nt)\,\mathrm{d}\,t, v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$$

$$\blacklozenge\ = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) + \frac{1}{n}(-\frac{1}{n}\sin(t)\cos(nt) + \frac{1}{n}\int \cos(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t) \qquad |\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$(\int \cos(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t)(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) - \frac{1}{n^2}\cos(nt)\sin(t)$$

$$\Rightarrow\ a_n = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{n^2-1}\cos(n\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{n^2-1\cos(n\frac{3\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{a_n} = \begin{cases} 0, n \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-2}{n^2-1} = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \equiv 0 \bmod 4 \\ \frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

$$\mathbf{Sf(t)} = \frac{\mathbf{2}}{\pi} + \cos(\mathbf{t}) + \sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{a_n}} \cos(\mathbf{nt})$$