4. Euler-Lagrange Gleichungen

Aufgabe 4.1 (Balken). In Abb. 4.1 ist ein drehbar gelagerter Balken (Trägheitsmoment $I_{B,zz}^{(A)}$ um den Drehpunkt A, Länge l, Masse vernachlässigbar) abgebildet auf den das Moment τ wirkt. Im betrachteten ebenen Beispiel gleitet ein Würfel mit der Kantenlänge $2k$, dem Massenträgheitsmoment $I_{W,zz}^{(S)}$ um den Schwerpunkt S des Würfels und der Masse m_W reibungsfrei auf diesem Balken. Weiters greift eine parallel zum Balken wirkende externe Störkraft f am Schwerpunkt des Würfels an. Am rechten Ende des Balkens ist eine lineare Feder mit der Federkonstante c und der entspannten Federlänge l_0 angebracht.

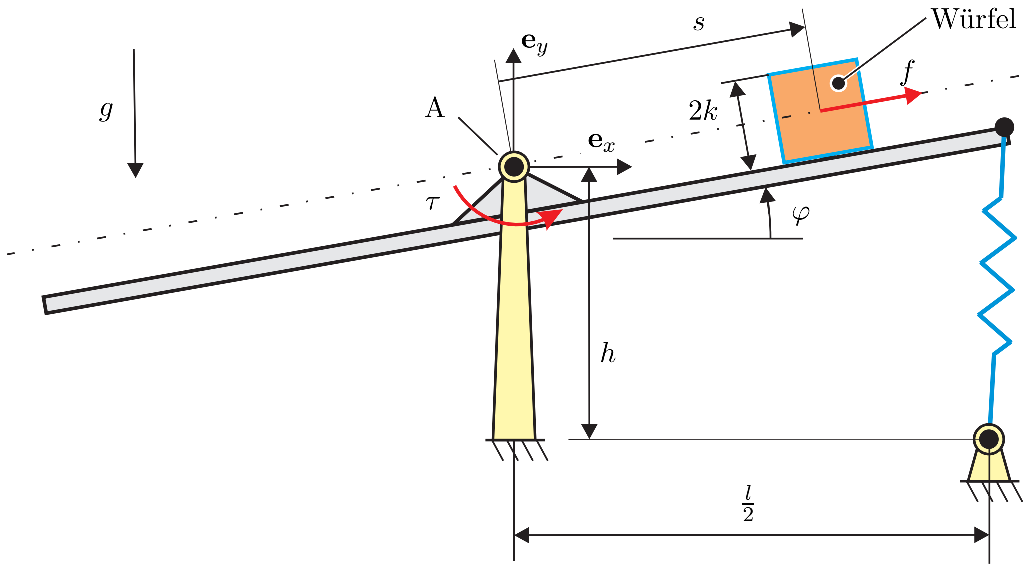

Abbildung 4.1.: Drehbar gelagerter Balken mit gleitendem Würfel.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und deren zeitlicher Ableitungen.

b) Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie für $\varphi = 0$ verschwindet.

c) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an.

d) Leiten Sie mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems her. Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen wenn die externe Störkraft f in x-Richtung auf den Würfel einwirkt?

Aufgabe 4.2 (Starrkörperdynamik). In diesem Beispiel wird das Beispiel des SCARA Roboters aus Aufgabe 3.2 um die Berechnung der Systemdynamik erweitert. Für die drei Teilkörper mit den Massen m_1, m_2 und m_3 wird dabei angenommen, dass sich die Ortsvektoren der Massenschwerpunkte im körperfesten Koordinatensystem zu

$$\mathbf{p}_1^{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2^{s2} = \begin{bmatrix} l_{23}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3^{s3} = \begin{bmatrix} l_{3e}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ergeben. Im Gegensatz zur allgemeinen Länge l_1 sind die Längen l_{23} bzw. l_{3e} die bekannten Abstände zwischen den Gelenks- und Endpunkten der Glieder, d.h. die Massenschwerpunkte wurden in die Mitte der drehbaren Arme gelegt. Die Trägheitshauptachsen der Massenträgheitsmomente werden weiters entlang der Basisvektoren der körperfesten Koordinatensysteme angenommen. Damit lassen sich die Trägheitsmatrizen im körperfesten Koordinatensystem in Diagonalform darstellen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Massenschwerpunkte $\mathbf{v}_0^{si}$, $i = 1, 2, 3$ und geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobimatrizen $(J_\mathbf{v})_0^{si}$ an.

b) Berechnen Sie die Drehwinkelgeschwindigkeiten der Körper um die Massenschwerpunkte $\boldsymbol{\omega}_0^{si}$, $i = 1, 2, 3$ und geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobimatrizen $(J_{\boldsymbol{\omega}})_0^{si}$ an.

c) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an.

d) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen des SCARA Roboters.

Hinweis: Versuchen Sie, das Beispiel zuerst soweit möglich per Hand zu rechnen. Überlegen Sie sich dabei vorab, welche Ergebnisse Sie erwarten, welcher Weg am Schnellsten zum Ziel führt und verlassen Sie sich nicht blind auf das Rechenkalkül.