Kombinatorik

Vienna University of Technology
Institute of Mechanics and Mechatronics
(Divisions Machine Dynamics,
Measurements and Actuators)
Markus Nemetz, System Administrator
markus.nemetz@tuwien.ac.at

Kombinatorik als Teilgebiet der Mathematik

- Zahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen von
- unterscheidbaren oder nicht unterscheidbaren Objekten
- mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge

Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten auf der Basis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von Laplace bildet die Kombinatorik eine wichtige Grundlage.

- Anordnungen (***Permutationen***)
- Auswahlen mit Beachtung der Reihenfolge (***Variationen***)
- Auswahlen ohne Beachtung der Reihenfolge (***Kombinationen***)

Anordnungen (Permutationen)

Permutation (= Zahl der Reihenfolgen): "Jede mögliche Anordnung von *n* Elementen, in der alle Elemente verwendet werden, heißt Permutation dieser Elemente.„

Beispiel: Anordnungen von sechs unterscheidbaren Objekten mit Beachtung der Reihenfolge

1. jedes der Objekte kann "auf den ersten Platz gelangen„
2. es gibt also sechs Möglichkeiten, den ersten Platz zu besetzen
3. Wenn der erste Platz besetzt, bleiben noch fünf Kandidaten für den zweiten Platz
4. ist auch dieser besetzt, nur noch vier Kandidaten für den dritten Platz, usf.
5. Für den vorletzten Platz bleiben schließlich nur noch zwei Objekte übrig
6. der letzte Platz muss mit dem "übrig gebliebenen" Objekt besetzt werden.

Also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ oder $6! = 720$ Möglichkeiten, sechs unterscheidbare Objekte anzuordnen

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen: n!

Beispiele zur Permutation von n Objekten

Beispiel n=3: Wir haben 3 verschiedene Objekte. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, diese Objekte anzuordnen ? Die Objekte seine die Zahlen 1,2,3. Dann gibt es für das erste Objekt 3 Möglichkeiten, für das zweite Objekt gibt es noch jeweils 2 Möglichkeiten, für das dritte Objekt gibt es jeweils nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt haben wir

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ Möglichkeiten:}$$

123, 132, 213, 231, 312, 321

Allgemeiner Fall: Wir haben n verschiedene Objekte. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, diese Objekte anzuordnen ? Die Objekte seine die Zahlen 1,2,3,...n. Dann gibt es für das erste Objekt n Möglichkeiten, für das zweite Objekt gibt es noch jeweils n-1 Möglichkeiten, für das dritte Objekt gibt es jeweils noch (n-2) Möglichkeiten, für das letzte (n-te) Objekt nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt haben wir

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ Möglichkeiten.}$$

Die Permutationen kann man auch als Auswahl von n Elementen aus einer Menge von n Elementen mit Reihenfolge und ohne Wiederholung betrachten.

Auswahlen mit Beachtung d. Reihenfolge (Variationen)

Variation ohne Zurücklegen: k Plätze sollen mit jeweils einem aus n Objekten besetzt werden, wobei jedes Objekt maximal einen Platz besetzen darf (also muss $k \leqq n$ sein). Hier gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Variation mit Zurücklegen: Wenn aus n Objekten k Objekte mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, dann kann jedes der n Objekte auf jedem der k Plätze der Auswahl erscheinen, es gibt demzufolge n^k mögliche Auswahlen

Wenn also aus 3 Objekten 11 mal mit Zurücklegen gezogen wird, dann sind 3^{11} = 177.147 verschiedene Auswahlen möglich.

Beispiele für Variationen (1/2)

Wiederholung mit Reihenfolge - Beispiel: Auswahl von k=2 Objekten aus einer Menge mit n=4 Objekten mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Für das erste Objekt können wir aus 4 Möglichkeiten wählen, für das zweite auch. Insgesamt sind es

$4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten:

11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44

Allgemeiner Fall: Auswahl von k Objekten aus einer Menge mit n Objekten mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge.
Für das erste Objekt können wir aus n Möglichkeiten wählen, für das zweite auch, für die folgenden ebenso. Insgesamt sind es k Wahlen, die wir treffen Die Möglichkeiten ergeben sich also dadurch, dass wir die Zahl n k-mal mit sich selbst multiplizieren:

n^k Möglichkeiten.

Beispiel für Variationen (2/2)

ohne Wiederholung mit Reihenfolge: - Bsp.: Auswahl von k=2 Objekten aus einer Menge mit n=4 Objekten ohne Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge.
Für das erste Objekt können wir aus 4 Möglichkeiten wählen, für das zweite bleiben nur nach 3. Insgesamt sind es

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ Möglichkeiten:}$$

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43

Allgemeiner Fall: Auswahl von k Objekten aus einer Menge mit n Objekten ohne Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge.
Für das erste Objekt können wir aus n Möglichkeiten wählen, für das zweite nur nach (n-1), für die folgenden jeweils eines weniger. Insgesamt sind es k Wahlen, die wir treffen Die Möglichkeiten ergeben sich also zu:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n! \,/\, (n-k)!$$

Möglichkeiten.

Auswahlen ohne Beachtung der Reihenfolge (Kombinationen)

Im Gegensatz zu den Variationen werden bei den Kombinationen die Anordnungen außer Acht gelassen, d.h. "abc" ist gleichwertig mit "bca". Es muss also weniger Kombinationen als Variationen geben.

Auswahlprobleme ohne Zurücklegen sind Anordnungsprobleme Die Zahl der möglichen Auswahlen wird ermittelt, indem die Zahl der Anordnungen ermittelt wird, bei denen die ausgewählten Objekte auf ausgezeichneten Plätzen angeordnet sind.

Dieses Auswahlproblem kann auf die Ermittlung aller Anordnungen zurückgeführt werden, bei denen die ausgewählten Objekte auf den ersten Plätzen landen, wobei es weder bei den ausgewählten noch bei den nicht ausgewählten Objekten auf die Reihenfolge ankommt.

Wenn aus n Objekten k ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, so gibt es jeweils die Klasse der k ausgewählten Objekte und die Klasse der (n-k) nicht ausgewählten Objekte, in der es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Dabei sind k und n-k in der Formel austauschbar, da man die n Objekte in zwei Teilmengen teilt, welche davon die interessierende ist, ist für die Anzahl der möglichen Aufteilungen nicht entscheidend.

Demzufolge gibt es $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mögliche derartige Auswahlen.

Dieser häufig benötigte Ausdruck wird als ***Binomialkoeffizient*** bezeichnet.

Beispiel Kombination

Beispiel: Auswahl von k=2 Objekten aus einer Menge mit n=4 Objekten ohne Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

.

Mit Reihenfolge ergaben sich 12 Möglichkeiten, nämlich 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Jetzt identifizieren wir Elemente, die durch Vertauschungen zwischen den 2 Objekten entstehen, also 12 = 21, 23 = 32,... .

Bei k=2 stelligen Elementen gibt es zu jedem $2 \cdot 1 = 2!$ Elemente, die wir nun als identisch ansehen. Es bleiben also nur noch 12:2= 6 Möglichkeiten:
12, 13, 14, 23, 24, 34

Formeln Zusammenfassung (1/2)

WICHTIGE FORMELN AUS DER KOMBINATORIK

Wir betrachten verschiedene Möglichkeiten, 2 Buchstaben aus einem 5-elementigen Alphabet $\{a, b, c, d, e\}$ auszuwählen. Allgemein: k Buchstaben aus einen n-elementigen Alphabet.

Variationen

Verschieden geordnete Objekte gelten als verschieden, alle möglichen Anordnungen werden extra gezählt.

Variationen mit Wiederholung = k-Tupel:

Es gibt $25 = 5^2$ Worte der Länge 2:

aa	ba	ca	da	ea
ab	bb	cb	db	eb
ac	bc	cc	dc	ec
ad	bd	cd	dd	ed
ae	be	ce	de	ee

Allgemein: n^k Strings der Länge k, wenn n mögliche Buchstaben erlaubt.

Variationen ohne Wiederholung:

Es gibt $20 = 5 \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{3!}$ Worte mit 2 *verschiedenen* Buchstaben:

	ba	ca	da	ea
ab		cb	db	eb
ac	bc		dc	ec
ad	bd	cd		ed
ae	be	ce	de	

Allgemein: $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, einen String mit k verschiedenen Buchstaben aus einem Alphabet mit n Buchstaben zu bilden.
Spezialfall **Permutation**: $n = k$: es gibt $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$ viele Strings mit n verschiedenen Buchstaben.

Formeln Zusammenfassung (2/2)

WICHTIGE FORMELN AUS DER KOMBINATORIK

Wir betrachten verschiedene Möglichkeiten, 2 Buchstaben aus einem 5-elementigen Alphabet $\{a, b, c, d, e\}$ auszuwählen.

Kombinationen

Verschieden geordnete Objekte gelten als gleich, trotz verschiedener möglicher Anordnungen wird jedes Objekt nur ein Mal gezählt.

Kombinationen mit Wiederholung = Multisets.

Es gibt $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ viele 2-elementige Multimengen, die Teilmenge von $\{a, b, c, d, e\}$ sind:

a, a				
a, b	b, b			
a, c	b, c	c, c		
a, d	b, d	c, d	d, d	
a, e	b, e	c, e	d, e	e, e

Anmerkung 1. Die Multimenge $\{a, a\}$ hat 2 Elemente, nämlich 2 Mal das Element a.

Anmerkung 2. Statt Multimengen kann man auch *geordnete* Strings (mit Wiederholung) verwenden.

Allgemein: eine Menge mit n Elementen hat $\binom{n+k-1}{k}$ viele verschiedene k-elementige Teil-multimengen.

Kombinationen ohne Wiederholung = Mengen.

Es gibt $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ viele 2-elementige Teilmengen von $\{a, b, c, d, e\}$:

a, b			
a, c	b, c		
a, d	b, d	c, d	
a, e	b, e	c, e	d, e

Anmerkung 1. Die Menge $\{a, b\}$ ist **dieselbe** Menge wie $\{b, a\}$. Die Menge $\{a, a\}$ enthält nur 1 Element.

Anmerkung 2. Statt Mengen kann man auch *geordnete* Strings (ohne Wiederholung) verwenden.

Allgemein: eine Menge mit n Elementen hat $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdots k}$ viele verschiedene k-elementige Teilmengen.