Nachtrag

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, genauso g.

- Für $c \in [a, b]$ ist $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
  (Ohne Beweis.)
- $(b-a) \cdot \min_{a \leq x \leq b}(f(x)) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b}(f(x))$.
  (Einfach zu sehen aus Definition.)
- Daraus folgt insbesondere:
  - Wenn $f(x) \geq 0$, dann $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
  - Wenn $f(x) \leq g(x)$ für $x \in (a, b)$, dann $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
  - $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- Setzt $f^+(x) := \max(0, f(x))$ und $f^-(x) := -\min(0, f(x))$.
  Dann sind f^+ und f^- stetig, und $f = f^+ - f^-$.
  Daher $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.

Integration: Uneigentliche Integrale ("zweiter Art")

Angenommen $\int_a^b f(x)dx$ existiert für alle $b \geq a$.
(Das ist jedenfalls der Fall wenn $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.)

Definition

$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$

- Natürlich muss der Limes nicht existieren. Bsp: $f(x) = \sin(x)$, dann ist $\int_a^b f(x)dx = 1 - \cos(b)$, was nicht konvergiert.
- Wenn der (uneigentliche) Limes ∞ ist, schreiben wir $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$. Bsp: $f(x) = 1$.
  Anderes Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx := \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$.
- Analog wenn Limes $-\infty$ ist. Bsp.: $f(x) = -1$.

Beispiele in denen der Limes ("eigentlich") existiert:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) = 1.$
- $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} - (-e^0) = 1.$

Bemerkungen

- Konvergenz von Reihe/Integral und Nullfolgen:
  - Zur Erinnerung: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert (d.h.: wenn die Reihe konvergiert), dann muss a_n eine Nullfolge sein.
    (Umkehrung gilt nicht, siehe $\frac{1}{n}$.)
  - Aus "$\int_0^\infty f(x)dx$ existiert" folgt aber nicht dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
    Bsp.: $f(x) = 1$ wenn $x \in [n, n + \frac{1}{2^n}]$, und 0 sonst.
    Dann ist $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.
  - Für monotone Funktionen gilt aber: Wenn $\int_0^\infty f(x)dx$ endlich ist, dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (Siehe nächstes slide.)
- Zerlegung in positiven und negativen Teil:
  - Für "eigentliche" Integrale haben wir gesehen:
    $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.
  - Wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ existiert, muss aber $\int_0^\infty f^+(x)dx$ nicht existieren.
  - Bsp: $f(x) = (-1)^n$ wenn $x \in [n, n + \frac{1}{n}]$ für $n \in \mathbb{N}$, und 0 sonst.
    Dann gilt $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (exisitert),
    aber $\int_1^\infty f^+(x)dx$ entspricht $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (divergent).

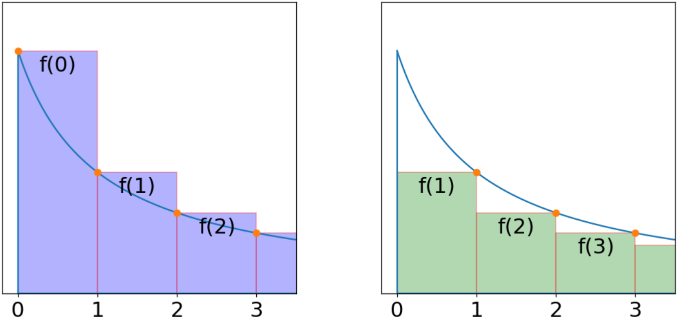
Integral als Abschätzung für Reihen

Theorem

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann
$\int_0^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=0}^\infty f(n) \leq f(0) + \int_0^\infty f(x)dx$.

Insbesondere: Die Summe ist endlich gdw Integral ist endlich.

Beweis: Blaue Rechtecke $= f(0) + f(1) + \cdots \geq \int_0^\infty f(x)dx$,
Grüne Rechtecke $= f(1) + f(2) + \cdots \leq \int_0^\infty f(x)dx$.



Integral als Abschätzung für Reihen: Beispiele

Bemerkungen:

- Analog $\int_M^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(x)dx$.
- Wenn strikt monoton fallend, dann beide mal $<$ statt $\leq$.

Beispiele:

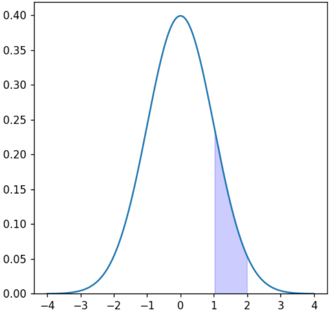
- $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ konvergieren beide nicht.
- $\int_1^\infty \frac{1}{n^2}dx = 1 < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{n^2}dx = 2$
  (Tatsächlich gilt: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1.64$)

Integration: Normalverteilung

Ein besonderes wichtiges Beispiel einer Funktion ohne elementares Integral:

Definition

$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
die Dichtefunktion einer (standard-)normalverteilten Zufallsvariable.



- Dichtefunktion heißt: Die Wahrscheinlichkeit dass der Wert in $[a, b]$ liegt ist $\int_a^b \varphi(x)dx$.
- Insbesondere: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$. (Daher der Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)
- Das Integral läßt sich nicht elementar darstellen. Äquivalent: $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ (die Wahrscheinlichkeit für $\leq x$ ist) ist nicht elementar darstellbar.

Mehr uneigentliche Integrale

Analog kann man in natürlicher Weise uneigentliche Integrale für viele andere Konstellationen definieren:

- $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$ (auch für uneigentl. Fall $\pm\infty$).
- Wenn $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ definiert, dann $\int_a^b f(x)dx := \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)dx$ (auch für den uneigentlichen Fall $\pm\infty$).
  Bsp: $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx := \lim_{y \to 0} \ln(|y|) = -\infty$.
- Analog für $f : (a, b]$.
  Bsp: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx := \lim_{y \to 0}(-\ln(y)) = \infty$.

Noch mehr uneigentliche Integrale

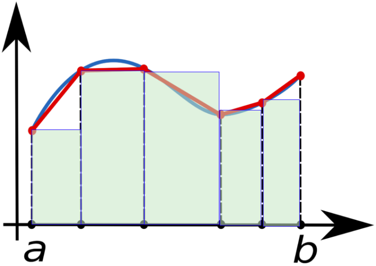
Diese Fälle kann man natürlich kombinieren (wobei man jeweils zeigen müsste dass die folgenden Definitionen unabhängig von c sind):

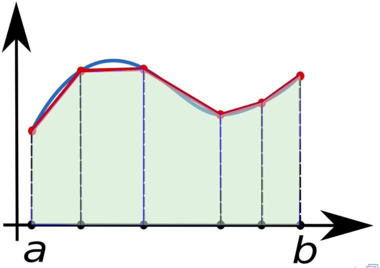
- Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ setze $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$.
- Für $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$

Etc.

Numerisches Integrieren

- Symbolisches Integrieren ist "schwierig".
- Numerisches Integrieren ist "leicht" und recht robust.
- Selbst die dümmstmögliche Methode (Summe, links) ist OK, besser und immer noch einfach: "Trapez" (rechts, `numpy.trapz`).
- Gibt natürlich viele andere numerische Methoden die für verschiedene Situationen besser sind.
- Funktioniert i.A. sogar für verrauschte "Echtdaten" gut und effizient (benötigt für N Datenpunkte N Summen).





(Mathematische) Bemerkung

- Unsere Definition des bestimmten Integrals war besonders einfach, weil wir "f stückweise stetig" voraussetzen.
- Eine einfache Modifikation der Definition ("Riemann Integral") funktioniert für mehr (aber nicht alle) Funktionen.
- Es gibt auch eine andere Definition, die mathematisch befriedigender ist ("Lebesque Integral"), die für noch viel mehr Funktionen funktioniert.
- Im wesentlichen: Man ordnet gewissen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$ etc) eine Größe zu ("Lebesque Maß"), und verwendet das Maß von $f^{-1}[y, y+\varepsilon)$ ist, etc.
- Aber weiterhin gilt: Es gibt immer Funktionen die nicht integrierbar sind bzw. Mengen denen man kein Maß zuordnen kann; besonders schönes Beispiel: Banach Tarski Paradoxon. (Man kann eine Kugeln mir Radius 1 im $\mathbb{R}^3$ in 10 Teile zerlegen, jeden Teil einmal rotieren und verschieben, und erhält als Ergebnis zwei Kugeln mit Radius 1.)

Differentialgleichungen

Gleichungen

Völlig willkürliche Beispiele für Gleichungen (in den reellen Zahlen):

- $x + 2 = 5$. Hat eindeutige Lösung.
- $\sin(x) = 0$. Lösungsmenge ist $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.
- Allgemein: $f(x) = 0$. Lösungsmenge sind die Nullstellen von f. Selbst wenn es nur endlich viele gibt, und wenn f "einfach" ist, kann man die Nullstellen i.A. nicht "explizit" anschreiben (sehr wohl aber recht effizien numerisch berechnen).
- $x^2 + 1 = 0$. Hat keine Lösung (in $\mathbb{R}$).
- $0 \cdot x = 1$. Hat keine Lösung (nichtmal in $\mathbb{C}$).
- $x = x$. Ganz $\mathbb{R}$ ist Lösungsmenge.
- $x = |x|$. Lösungsmenge ist $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

In diesen Gleichungen ist x eine "freie Variable", die für eine reelle Zahl steht.

Gleichungen in mehreren Variablen

Weitere völlig willkürliche Beispiele, diesmal für für Gleichungen in den reellen Zahlen mit zwei Variablen, x und y.
Die Lösungsmenge kann man nun als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ darstellen:

- $x + 2 = y$. Eine Gerade.
- Allgemeiner $y = f(x)$. Graph der Funktion f.
- $y^2 = x$. Eine Parabel (kein Funktionsgraph).
- $y^2 = -1 - x^2$. Hat keine Lösung.
- $x \cdot y = x \cdot y$. Ganz $\mathbb{R}^2$ ist Lösungsmenge.
- $x \cdot y = |x \cdot y|$. Lösungsmenge ist Vereinigung zweier Quadranten.

Gleichungssysteme

Weitere völlig willkürliche Beispiele, diesmal für für ein System von Gleichungen:

- $x + y = 1$, $x - y = 3$. Eindeutige Lösung $x = 2$, $y = -1$.
- $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$. Lösungsmenge ist Gerade $y = 1 - x$.
- $x + y = 1$, $2x + 2y = 0$. Keine Lösung.

Solche "linearen Gelichungssystem" werden in der linearen Algebra behandelt.

Funktionsgleichungen

Wir betrachten nun Gleichungen mit einer freien Variablen, nennen wir sie f, die für eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ steht mit $A \subseteq \mathbb{R}$ "größtmöglich".
Wieder ein paar Beispiele:

- $f(x) = |f(x)|$. (Gemeint ist immer: "für alle x in A")
  Jede Funktion mit $f(x) \geq 0$ ist Lösung.
- $(f(x))^2 = -1$. Keine Lösung.
- $0 \cdot f(x) = 0$. Jede Funktion ist Lösung.
- $f(x) = x^2$. Definiert direkt (und eindeutig) die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$.
- $f(x)^2 = x$.
  - Offenbar kann so ein f nur für $x \geq 0$ definiert sein. Wir suchen also Lösungen $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$.
  - Offenbar muss gelten: $f(x) = \pm\sqrt{x}$.
  - Es kann alle möglichen seltsamen Lösungen geben, z.B.: $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) = -\sqrt{x}$ sonst.
  - Man sieht aber: Es gibt nur zwei stetige Lösungen: $f(x) = \sqrt{x}$, und $f(x) = -\sqrt{x}$

Funktionsgleichungen (Forts.)

Gesucht: $f : A \to \mathbb{R}$ das bestimmte Gleichung(en) erfüllt.

- Üblicherweise suchen wir nur f mit zusätzlichen Eigenschaften wie stetig, differenzierbar, etc.
- Der Definitionsbereich A wird i.A. nicht ganz $\mathbb{R}$ sein, wir suchen "sinnvolle" (i.A.: maximale) A.
  (Für $A = \{0\}$ werden sich oft viele Lösungen finden die aber nicht relevant sind.)
  Oft ist so ein maximales A ein Intervall, manchmal beschränken wir uns auch explizit auf Intervalle.
  (Wenn im vorigen Bsp $A = [0, 1] \cup [3, 4]$ ist, gibt es 4 statt 2 stetige Lösungen, etc.)

Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine Funktionsgleichung die den Differentialoperator verwendet. Willkürliche Beispiele:

- $f'(x) = 1$. Lösungen sind $f(x) = x + c$ für $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
- Allgemein: $f'(x) = g(x)$ (für konkretes g) hat Lösung(en) $\int f(x)dx$ [auf Intervall eindeutig bis auf Konstante c].
- $f'(x) = f(x)$. Wir wissen: $a \cdot e^x$ ist Lösung, für $a \in \mathbb{R}$. Andere Lösungen?
- $f'(x) = x \cdot f(x)$. Lösung??

Differentialgleichung

- Diffgleichungen viel komplizierter als Gleichungen über reelle Zahlen. (Letztere kann man oft zumindest numerisch gut behandeln.)
- Wie man schon beim Integrieren sieht haben "einfache" Diffgleichungen oft keine "einfach anschreibbare" Lösung. Für das einfaches Integrieren gibt es robuste numerische Verfahren, für allgemeinere Diffgleichungen ist das ungleich schwieriger.
- Wir kennen schon die Unterscheidung "exakt (symbolisch)" vs "numerisch". Bei Diffgleichungen kommt noch die Unterscheidung "qualitativ" vs "quantitativ" dazu.

Notation

- Gewöhnliche (explizite) Differentialgleichungen erster Ordnung: $f'(x) = g(x, f(x))$, wobei g eine gegebene Funktion ist.
- Gewöhnliche (explizite) Differentialgleichungen zweiter Ordnung: $f''(x) = g(x, f(x), f'(x))$.
  Grundlage der Newtonschen Mechanik (in gegebenem Kraftfeld): $s''(t) = \frac{1}{m} F(s(t))$.
- Allgemein nennt man Diffgleichungen bei denen die Variable für eine einstellige Funktion steht eine "gewöhnliche Diffgleichung".
- Im Gegensatz dazu: Wenn f für zB eine zweistellige Funktion $f(x, y)$ steht, gibt es die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Die entsprechenden Diffgleichungen heißen "partielle Diffgleichungen" (Z.B. Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.)

Gewöhnliche Diffgleichungen erster Ordung 1

Wir schreiben im Folgenden y oder $y(x)$ für die gesuchte Funktion ("abhängige Variable"). Statt $y(x)$ schreiben wir oft einfach y, und statt $y'(x)$ zbw $\frac{dy}{dx}$ einfach y'.
Wir wollen $y' = f(x, y)$ lösen.

Bsp: $y' = y$. Eine Lösung: $C \cdot e^x$. Wenn wir zusätzlich festlegen dass $y(1) = 2$ sein soll, ergibt sich die eindeutige Lösung $C = \frac{2}{e}$.

Wenn zusätzlich zu $y' = f(x, y)$ noch $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, spricht man von einem "Anfangswertproblem".

Anfangswertproblem

Man könnte intuitiv erwarten dass ein Anfangswertproblem eine (eindeutige) Lösungs besitzt: Wie wissen $y(x_0) = y_0$ und daher $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Wir wissen daher $y(x_0 + \delta) \sim y(x_0) + \delta y'(x_0)$. Damit können wir $y'(x_0 + \delta) = f(\dots)$ berechnen, etc.

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *stetig.*

- *Es gibt für jedes* $x_0 \in (a, b)$ *und* $y_0 \in (c, d)$ *ein* $\varepsilon > 0$ *und eine Lösung* $y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.
- *Wenn zusätzlich gilt (Lipschitz-Bedingung): Es gibt ein* $L \in \mathbb{R}$ *s.d.* $(\forall x \in [a, b])\,(\forall y_1, y_2 \in [c, d])\,|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, *dann ist diese Lösung eindeutig (auf* $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$*).*

(Für den Spezialfall $f(x, y) = g(x)$ sagt das nur, dass stetige Funktionen integrierbar sind.)

Trennung der Variablen

Die Lösung zu bestimmen ist eine ganz andere Frage.
Wir untersuchen Spezialfälle:

- $y' = g(x)$ (d.h. hängt nur von x ab, nicht von y).
  Dann $y = \int g(x)dx$.
- $y' = g(x)h(y)$ mit $h(y) \neq 0$.
  Dann funktioniert "Trennung der Variablen": $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, d.h. $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.
  Integriere beide Seiten: $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$, das ergibt $\tilde{H}(y) = G(x)$. "Isoliere" aus dieser impliziten Gleichung y.
- Beispiel: $y' = \frac{x}{y^2}$ gibt $\int y^2 dy = \int x dx$, d.h. $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + C$ bzw $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + D}$.

Sonderfall des Sonderfalls: Autonome Diffgl

Betrachte $y' = h(y)$. Wir bekommen also y prinzipiell durch Integration etc. Aber Integration ist oft nicht möglich. Qualitative Überlegungen:

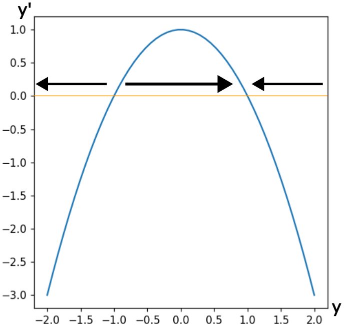
- Von besonderem Interesse sind $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(y_0) = 0$. Dann ist die konstante Funktion $y(x) = y_0$ eine Lösung ("Gleichgewichtspunkt").
- y_0 heißt "asymptotisch stabil", wenn es ein $\delta > 0$ gibt so dass für jede Lösung y gilt: Wenn $|y(x_0) - y_0| < \delta$, dann $\lim_{x\to\infty} y(x) = y^*$. (Jede Lösung die in die Nähe des Gleichgewichts kommt wird also "eingesaugt".)

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, und y_0 Gleichgewichtspunkt.
Wenn $h'(y_0) < 0$, dann ist y_0 asymptotisch stabil.

Beispiel für den Sonderfall des Sonderfalls

Betrachte $y' = 1 - y^2$. "Qualitative" Überlegungen:



- Zwei Gleichgewichtspunkte: -1 und 1, 1 ist stabil.
- Wenn $y(x) > 1$, dann wird y mit steigendem x kleiner (aber kann nicht unter $y(x) = 1$ kommen).
- Wenn $-1 < y(x) < 1$, dann wird y mit steigendem x größer (aber kann nicht über $y(x) = 1$ kommen).
- Wenn $y(x) < -1$, dann wird y mit steigendem x kleiner.
- -1 ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.