206) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

Intervallbreite $\Rightarrow b-a=1$

$k=1 \quad \frac{n}{n^2+1} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ konstant bleibt $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$

$k=n \quad \frac{n}{n^2+n^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{1+1}$ Variabel $\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$

Obersumme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right) \qquad \lim_{n\to} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) ✓$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$