7+

(1) [8 Punkte] Gegeben ist die reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n^3+2}} + \cdots + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n^3+n}}.$$

Man zeige Konvergenz der Folge a_n und bestimme den Grenzwert a indem man geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ angibt mit $b_n \leq a_n \leq c_n$. Man benenne und formuliere dabei unbedingt auch das hier angewandte Konvergenzkriterium!

6

(2) [8 Punkte] Man bestimme alle relativen Minima, relativen Maxima und Sattelpunkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x - y) \cdot (1 - xy).$$

(3) [8 Punkte] Man bestimme die Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$g''(x) + g'(x) - 2g(x) + 9e^x = 0, \qquad g(0) = 1, \quad g'(0) = 1.$$

4

(4) [8 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff **Häufungspunkt einer Folge** $(a_n)_{n\geq 0}$.

(b) Definieren Sie den Begriff **Grenzwert einer Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) Definieren Sie, wann zwei Folgen (a_n) und (b_n) **asymptotisch gleich** (= asymptotisch äquivalent) sind.

(d) Man definiere, wann für zwei Folgen (a_n) und (b_n) die folgende Beziehung gilt:

3

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema "Differential- und Integralrechnung in einer Variablen" (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen):

Für welche der unten angegebenen reellen Funktionen $f(x)$ existiert das bestimmte Integral $\int_0^{10} f(x)dx$? (Der Ganzteil $\lfloor x \rfloor$ von x: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$) ⊗ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ⊗ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N}, \\ 1, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$ ○ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ✓
Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ monoton ist, ist sie dann in diesem Intervall auf jeden Fall integrierbar? ○ ja ⊗ nein ↯
Wenn eine Funktion f auf $[a, b]$ nicht stetig ist, ist es dann möglich, daß $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar ist? ○ ja ⊗ nein ↯
Welche der folgenden Funktionen ist/sind differenzierbar an der Stelle 0? ($\lvert x \rvert$: Betrag von x) ⊗ $\lvert x \rvert^2$ ○ $\lvert x \rvert$ ⊗ $x \cdot \lvert x \rvert$ ✓
Wenn eine Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ differenzierbar ist, was gilt dann für $f(x)$ auf jeden Fall noch? ○ $f(x)$ auf $[a, b]$ monoton ⊗ $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar ⊗ $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig ✓

Im folgenden betrachten wir immer die Funktion $h(x) = (-x) \cdot e^{-x}$. Um die folgenden Fragen zu beantworten, können Sie natürlich Nebenrechnungen machen, gewertet wird aber nur, was hier angekreuzt wurde!
Wo besitzt $h(x)$ lokale Extremwerte? ⊗ $-e$ ○ -2 ⊗ -1 ○ 0 ⊗ 1 ○ 2 ⊗ e ○ keine Extrema ↯
Wo besitzt $h(x)$ Wendepunkte? ○ $-e$ ○ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ e ⊗ keine Wendepunkte ↯
Was ist der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^\infty h(x)dx$? ○ $-e$ ○ -2 ○ -1 ⊗ 0 ○ 1 ○ 2 ○ e ○ $-\infty$ ○ $+\infty$ ↯

$h(x)$ = def: $f(x) = h(y)$

Extrema: $f'(x) = 0$ Wendep. $f''(x) = 0$

$f'(x) = (-x)' \cdot e^{-x} + (-x) \cdot (e^{-x})' =$

$= -1e^{-x} + (-x)^2 (e^{-x}) =$

$= -e^{-x} + x^2 e^{-x}$

$f''(x) = (x^2 e^{-x} - e^{-x})' =$

$= (2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-x) \cdot e^{-x}) + xe^{-x} = 2xe^{-x} - x^3 e^{-x} + xe^{-x} =$

$= 3xe^{-x} - x^3 e^{-x}$

$-e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} = 0 \mid : e^{x}$

$-1 + x^2 = 0$

$x^2 = +1$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$f(1) = -1 \cdot e^{-1}$

$f(-1) = 1 \cdot e^{1} = e$