Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2017S)
Lösungen

Aufgabe 1.1 Sei die Sprache D_1 gegeben durch folgende induktive Definition: D_1 ist die kleinste Menge, sodass

- $\varepsilon \in D_1$
- $w \in D_1 \Rightarrow \underline{[}w\underline{]} \in D_1$
- $w_1, w_2 \in D_1 \Rightarrow w_1 w_2 \in D_1$

(*Anmerkung*: D_1 beschreibt die Sprache der wohlgeformten Klammerausdrücke über dem Alphabet $\{\underline{[}, \underline{]}\}$)

a) Geben Sie eine deterministische Turingmaschine M an, welche die Sprache D_1 akzeptiert, und erläutern Sie (jeweils) auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine. Es steht Ihnen dabei frei, ob Sie das auf Folie 26 definierte Modell (mit einem Band) oder das auf Folie 72 definierte Modell (mit zwei Bändern, einem Eingabe- und einem Arbeitsband, wobei M in diesem Fall die Kellerautomatenbedingung erfüllen soll) verwenden.

b) Erweitern Sie Ihre unter a) gefundene Maschine so, dass sie die Sprache D_n (also wohlgeformte Klammerausdrücke über dem Alphabet $\{\underline{[}_i, \underline{]}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$) akzeptiert.

Lösung
<u>Variante 1:</u>

a) Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 3\}, \{\underline{[}, \underline{]}\}, \{\underline{[}, \underline{]}, X, B\}, \delta, q_0, B, \{q_3\})$$

wobei

δ	$\underline{[}$	$\underline{]}$	X	B
q_0	$(q_0, \underline{[}, R)$	(q_1, X, L)	(q_0, X, R)	(q_2, B, L)
q_1	(q_0, X, R)		(q_1, X, L)	
q_2			(q_2, B, L)	(q_3, B, S)
q_3				

Idee:

q_0: Der Lese-/Schreibkopf überliest alle Symbole $\underline{[}$ bis er das erste Symbol $\underline{]}$ erreicht; dieses wird mit X überschrieben.
q_1: über gegebenenfalls bereits mit X markierte Zellen wird die passende öffnende Klammer ebenfalls mit X überschrieben.
q_2: Hier wird sicher gestellt, dass sich nur noch mit X markierte Zellen auf dem Eingabeband befinden. Ist dies der Fall, so wechselt die Maschine in den Zustand q_3, den Endzustand.
q_3: Endzustand; Die Maschine erreicht diesen Zustand nur, wenn zu Beginn des Laufes ein wohlgeformter Klammerausdruck am Eingabeband war, und akzeptiert somit die Eingabe.

b) Für die Sprache D_n definieren wir eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq n+2\}, \{\underline{[}_i, \underline{]}_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \{\underline{[}_i, \underline{]}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{X, B\}, \delta, q_0, B, \{q_{n+2}\})$$

wobei

$$\begin{array}{rl} \delta = & \{(q_0, \underline{[}_i; q_0, \underline{[}_i, R) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \cup & \{(q_0, \underline{]}_i; q_i, X, L) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \cup & \{(q_0, X; q_0, X, R), (q_0, B; q_{n+1}, B, L)\} \\ \cup & \{(q_i, X; q_i, X, L) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \cup & \{(q_i, \underline{[}_i; q_0, X, R) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \cup & \{(q_{n+1}, X; q_{n+1}, B, L), (q_{n+1}, B; q_{n+2}, B, S)\} \end{array}$$

<u>Variante 2:</u>

a) Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\underline{[}, \underline{]}\}, \{A, Z_0\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_3\})$$

in Normalform, welche die Kellerautomatenbedingung erfüllt; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{array}{rl} 1: & \delta(q_0, \underline{[}, B) = (q_0, A, R, R) \\ 2: & \delta(q_0, \underline{]}, B) = (q_1, B, S, L) \\ 3: & \delta(q_1, \underline{]}, A) = (q_0, B, R, S) \\ 4: & \delta(q_0, Z_2, B) = (q_2, B, S, L) \\ 5: & \delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_3, Z_0, S, R) \end{array}$$

Erläuterung:

1 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{[}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$2, 3$: Für jedes eingelesene Symbol $\underline{]}$ wird ein Symbol A im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

$4, 5$: wird Z_2 auf dem Eingabeband (d.h., das Ende der Eingabe) erreicht, so sollte das Arbeitsband leer sein. M geht dann in den (einzigen) Endzustand q_3 über und akzeptiert somit die Eingabe.

b) Für die Sprache D_n definieren wir eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\underline{[}_i, \underline{]}_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \{X_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_3\})$$

in Normalform, welche die Kellerautomatenbedingung erfüllt; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{array}{rll} 1': & \delta(q_0, \underline{[}_i, B) = (q_0, X_i, R, R) & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ 2': & \delta(q_0, \underline{]}_i, B) = (q_1, B, S, L) & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ 3': & \delta(q_1, \underline{]}_i, X_i) = (q_0, B, R, S) & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ 4: & \delta(q_0, Z_2, B) = (q_2, B, S, L) & \\ 5: & \delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_3, Z_0, S, R) & \end{array}$$

Aufgabe 1.2 Seien A, B und C Sprachen, die rekursiv aufzählbar sein können oder auch nicht. Wir wissen allerdings Folgendes:

- $A \leq B$
- $B \leq C$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis C handelt)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis C handelt)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis C handelt)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist das Komplement von C entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

b) Ist B rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar, so kann C entscheidbar sein.

c) Ist B unentscheidbar, dann muss A auch unentscheidbar sein.

d) Ist A rekursiv aufzählbar, so ist B entscheidbar.

Lösung

a) **Jedenfalls**. Entscheidbare Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen. Ist also $\overline{C}$ entscheidbar, so muss auch C entscheidbar sein. Weiters sind Reduktionen transitiv, und nachdem $A \leq B$ und $B \leq C$ gilt auch $A \leq C$. Gibt es also eine Reduktion von A auf C, so muss C mindestens so schwierig wie A sein. Eine Lösung von C kombiniert mit der Reduktion von A auf C impliziert auch eine Lösung von A. Da C rekursiv (entscheidbar) ist, und A auf C reduziert werden kann, muss A auch entscheidbar sein.

b) **Keinesfalls**. Wenn B nicht entscheidbar ist, so kann C auch nicht entscheidbar sein. Die Reduktion und ein Algorithmus, der C entscheidet, könnten dazu verwendet werden, D zu entscheiden. Dies ist aber im Widerspruch zur Angabe (D unentscheidbar).

c) **Vielleicht**. Ist B unentscheidbar, so muss A nicht notwendigerweise unentscheidbar sein. Ein einfaches Gegenbeispiel: Sei $A = \{\}$, also die Leersprache, welche jedenfalls entscheidbar ist: Die Frage ob $w \in A$ ist, kann für jedes Wort w mit "nein" beantwortet werden. Sei nun M eine Turingmaschine, die A akzeptiert und B die unentscheidbare Sprache $L_{ne} = \{M \mid L(M) \neq \{\}\}$ (s. Folie 58). Dann können wir eine Reduktion von A auf B so konstruieren: Gegeben eine Instanz w von A, fragen wir ob M in L_{ne} ist. Nachdem $L(M) = \{\}$, ist die Antwort immer "nein".

d) **Vielleicht**. Allerdings nur, wenn A auch entscheidbar ist. Denn die Reduktion und ein Algorithmus, der B entscheidet, könnten dazu verwendet werden, A zu entscheiden.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern jeweils möglich, verwenden Sie dafür den Satz von Rice. (Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache leer?

b) Hat eine Turingmaschine weniger als 42 Zustände und hält bei Eingabe $\underline{1}$?

c) Macht eine Turingmaschine mehr als 1000 Bewegungen, wenn sie mit einem leeren Band gestartet wird?

d) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache überabzählbar (unendlich)?

e) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache (mindestens) ein Palindrom?

Lösung a) Unentscheidbar, Satz von Rice: Es handelt sich um die Eigenschaft $P = \{\{\}\}$. Diese Eigenschaft kommt einer Sprache L zu, nämlich $L = \{\}$. Keine andere rekursiv aufzählbare Sprache ist in P, dementsprechend ist P nicht trivial, und damit nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

(*Anmerkung:* Beachten Sie den Unterschied zwischen $P = \{\{\}\}$, der Eigenschaft die Leersprache zu sein und der leeren Eigenschaft $P = \{\}$, welche keiner rekursiv aufzählbaren Sprache zukommt, siehe auch e))

b) Entscheidbar. Die Menge von (codierten, normierten) Turingmaschinen mit weniger als 42 Zuständen ist endlich, und damit regulär, also sicher entscheidbar. (Der Satz von Rice ist hier aber nicht anwendbar.)

c) Dieses Problem ist entscheidbar: Simuliere 1001 Schritte der Turingmaschine. (Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da es sich nicht um eine Eigenschaft der von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen handelt, sondern um die Turingmaschinen selbst.)

d) Entscheidbar. Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache zu, überabzählbar zu sein (d.h. $P = \{\}$). In der Tat ist dieses Problem entscheidbar.

e) Unentscheidbar, Satz von Rice: $P = \{L \mid w = w^r \text{ für ein } w \in L\}$ ist keine triviale Eigenschaft, denn es gilt z.B. $\{\} \notin P$ aber $\{\underline{0}, \underline{1}\}^* \in P$. Daher ist dieses Problem nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Für jede Sprache L gilt: $|L| < |L^*|$ (wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente in A bezeichnet).

b) Sei $L_1 = \{\underline{a}^n \mid n \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{b}^{2n}\underline{c}^n \mid n \geq 0\}$. Dann gilt: $L_1L_2 = \{\underline{a}^n\underline{b}^{2n}\underline{c}^n \mid n \geq 0\}$.

c) Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

d) Sind L_1 und L_2 entscheidbar, so ist auch $L_1 \cup L_2$ entscheidbar.

e) Es gibt nicht-reguläre Sprachen, deren Komplement regulär ist.

Lösung

a) Falsch. Gegenbeispiel: $L = \{\varepsilon\}$. Dann gilt: $L = L^* = \{\varepsilon\}$.

b) Das ist sicher nicht korrekt, da z.B. $\underline{a}^2 \in L_1$ und $\underline{b}^2\underline{c} \in L_2$, aber $\underline{a}^2\underline{b}^2\underline{c} \notin \{\underline{a}^n\underline{b}^{2n}\underline{c}^n \mid n \geq 0\}$. (Richtig wäre in diesem Fall: $\{\underline{a}^n \mid n \geq 0\}\{\underline{b}^{2n}\underline{c}^n \mid n \geq 0\} = \{\underline{a}^n\underline{b}^{2m}\underline{c}^m \mid n, m \geq 0\}$)

c) Falsch. Gegenbeispiel: das Halteproblem ist eine Teilmenge der regulären (und damit entscheidbaren) Sprache $\{\underline{0}, \underline{1}\}^*$, jedoch selbst sicher nicht entscheidbar!

d) Das ist korrekt. L_1 (bzw. L_2) werde durch die stets haltende Turingmaschine M_1 (bzw. M_2) erkannt. Um $L_1 \cup L_2$ zu erkennen, entwerfen wir eine Turingmaschine M, die zuerst M_1 simuliert und dann M_2 simuliert. M wird genau dann akzeptieren, wenn eine der beiden Turingmaschinen akzeptiert. Da M stets hält, ist $L_1 \cup L_2$ entscheidbar.

e) Reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen. Ist also das Komplement $\overline{L}$ einer Sprache L regulär, so muss L auch regulär sein.

Aufgabe 1.5 Sind folgende Sprachen $L_i, 1 \leq i \leq 4$, regulär? Falls ja, so geben Sie einen entsprechenden deterministischen endlichen Automaten an; falls nein, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen.
(Wählen Sie mindestens zwei Unterpunkte.)

a) $L_1 = \{w\underline{\#}w \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$

b) $L_2 = \{u \underline{+} v \underline{=} w \mid u, v, w \in \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^*$ und $z(u) + z(v) = z(w)\}$

wobei $z(x)$ die durch die Darstellung x repräsentierte Binärzahl bezeichnet. L_2 enthält also z.B. die Wörter $\underline{\mathtt{11+1=100}}$ und $\underline{\mathtt{100+11=111}}$, hingegen ist z.B. $\underline{\mathtt{11+1=01}}$ nicht in L_2.

c) $L_3 = \{\underline{\mathtt{0}}^n \underline{\mathtt{1}}^{n \bmod m} \mid n \geq 0\}$

wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne Berücksichtigung eventuell führender Nullen) ist.

(*Hinweis:* $x \bmod y$ steht für den Rest der (ganzzahligen) Division von x durch y.)

d) $L_4 = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = |w|_{\underline{\mathtt{b}}} + |w|_{\underline{\mathtt{c}}}\}$

(*Hinweis*: $|w|_x$ bezeichnet die Anzahl der Symbole x in w.)

Lösung

a) L_1 ist sicher nicht regulär. Beweis indirekt.

Angenommen, L_1 ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\#} \underline{\mathtt{a}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 1 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\#} \underline{\mathtt{a}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{\mathtt{a}}^{m+|y|} \underline{\#} \underline{\mathtt{a}}^m$ aus L_1 sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L_1 kann somit keine reguläre Sprache sein.

b) Beweis indirekt. Angenommen, L_2 ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{1}}^m \underline{+} \underline{\mathtt{0}} \underline{=} \underline{\mathtt{1}}^m$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 3 > m$.

Nach dem Pumping Lemma kann w in xyz so aufgeteilt werden, dass $|xy| \leq m$, $|y| > 0$ und für alle $i \geq 0$ gilt: $xy^iz \in L$.

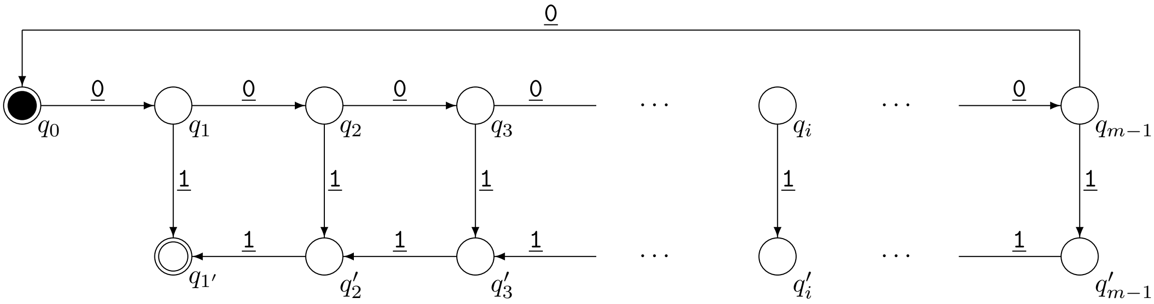
Nachdem $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$, kann kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{1}}$ bestehen, wobei $y = \underline{\mathtt{1}}^k$ ist für $1 \leq k \leq m$.

Wählen wir nun z.B. $i = 0$, so müsste auch $\underline{\mathtt{1}}^{m-k} \underline{+} \underline{\mathtt{0}} \underline{=} \underline{\mathtt{1}}^m$ aus L_2 sein, was aber nicht der Fall ist! (Denn offensichtlich ist $z(\underline{\mathtt{1}}^m)$ nicht die Summe von $z(\underline{\mathtt{1}}^{m-k}) + z(\underline{\mathtt{0}})$.) Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L_2 kann somit keine reguläre Sprache sein.

c) L_3 ist regulär und wird z.B. von folgendem DEA akzeptiert:

$\mathcal{A} = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq m-1\} \cup \{q'_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}, \delta, q_0, \{q_0, q'_1\})$, wobei

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_i, \underline{\mathtt{0}}) = q_{i+1} & \text{für } 0 \leq i \leq m-2, \\
\delta(q_{m-1}, \underline{\mathtt{0}}) = q_0, & \\
\delta(q_i, \underline{\mathtt{1}}) = q'_i & \text{für } 1 \leq i \leq m-1, \\
\delta(q'_i, \underline{\mathtt{1}}) = q'_{i-1} & \text{für } 2 \leq i \leq m-1
\end{array}$$



d) Beweis indirekt. Angenommen, L_4 ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $xy^0z = \underline{\mathtt{a}}^{m-|y|}\underline{\mathtt{b}}^m$ aus L_5 sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L_5 kann somit keine reguläre Sprache sein.