Zusammenfassung Analysis für Informatik

Stefan Haider
stefan.haider@student.tuwien.ac.at

Sommersemester 2012 Panholzer

Prüfungsstoff 4.1 - 6.3, 7.5, 7.6 und 9.1

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen reeller Zahlen

S 139 bis S 148

Definition Folge Unter einer Folge versteht man eine Anordnung von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, ...$
Eine weitere Schreibweise stellt $(a_n)_{n\geq 0}$ dar.
Folgen können auch als Funktionen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ interpretiert werden.
Die Zahlen a_n nennt man Folgenglieder, n ist der Index des Folgenglieds.

1.1 Beispiele für Folgen

1. konstante Folge: $a_n = 2$
2. arithmetische Folge: $a_n = a_0 + dn$
3. geometrische Folge: $a_n = a_0 q^n$
4. rekursive Folge: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

1.2 Grenzwerte und Häufungspunkte

ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \varepsilon\}$

fast alle Eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ wenn sie für alle außer endlich viele Ausnahmen gilt.

Definition Grenzwert Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge a_n falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$
$N(\varepsilon)$ bezeichnet den Schwellwert für ε

Definition Konvergenz Eine Folge heißt konvergent falls sie einen Grenzwert a besitzt.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Nullfolge Eine Folge mit dem Grenzwert 0 nennt man Nullfolge.

Uneigentliche Konvergenz Eine Folge ist uneigentlich konvergent wenn für sie gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
$+\infty$ und $-\infty$ nennt man uneigentliche Grenzwerte.

Definition Divergenz Eine Folge heißt divergent falls sie **keinen** Grenzwert besitzt.

Definition Häufungspunkt Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt.

Limes superior Der größte Häufungspunkt wird als Limes superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet.

Limes inferior Der kleinste Häufungspunkt wird als Limes inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet.

Zusammenhang Grenzwert/Häufungspunkt Für konvergente Folgen gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

1.3 Monotonie und Beschränktheit

1.3.1 Definitionen

monoton Eine Folge a_n heißt monoton fallend wenn gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

streng monoton Gilt sogar $a_{n+1} < a_n$ ist die Folge sogar streng monoton fallend.

steigend Analog werden (streng) monoton wachsende Folgen definiert.

obere Schranke Besitzt eine Folge eine reelle Zahl S für die gilt $a_n < S$ nennt man S eine obere Schranke von a_n.

Supremum Die kleinste obere Schranke S_0 wird somit als Supremum ($\sup a_n$) bezeichnet.

Infimum Analog zum Supremum wird das Infimum als die größte untere Schranke definiert.

Vollständigkeitssatz für reelle Zahlen Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilemenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum). Selbiges gilt für reelle Folgen.

1.3.2 Sätze

Satz Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Hauptsatz über monotone Folgen Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

1.4 Rechnen mit Grenzwerten

a_n und b_n sind konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ falls $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \land b \neq 0$

1.4.1 Uneigentliche Grenzwerte

unbestimmte Formen Das Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten ist nicht immer sinnvoll, da unbestimmte Formen wie $\frac{\infty}{\infty}$ entstehen.
a_n und b_n sind konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \begin{cases} \infty & \text{if } \lambda > 0, \\ -\infty & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$ falls $b > 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{b_n}{a_n}) = 0$ falls $b \in \mathbb{R}$

Bernoulli'sche Ungleichung Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \geq -1, x \neq 0$ gilt:

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Euler'sche Zahl $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2,7182$

1.5 Konvergenzuntersuchung

Um Konvergenz zu zeigen muss Monotonie und Beschränktheit einer Folge bewiesen werden.

Sandwich-Theorem a_n und b_n sind konvergente Folgen deren Grenzwerte übereinstimmen. Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. c_n ist nun eine Folge für die gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$. Daraus folgt nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Definition Teilfolge Eine Folge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ nennt man Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Satz Für eine Folge a_n mit dem Häufungspunkt a gibt es eine Teilfolge, die gegen a konvergiert. Falls umgekehrt eine Teilfolge eine Grenzwert besitzt ist dieser Grenzwert Häufungspunkt von a_n.

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge a_n enthält einen Häufungspunkt.

Definition Cauchyfolge Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$.
Das bedeutet, dass eine Folge, für welche Glieder mit großem Index nahe beieinanderliegen, eine Cauchyfolge ist.

Cauchykriterium Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

2 Reihen

S 148 bis S 158

Definition Reihe Unter einer unendlichen Reihe versteht man eine unendliche Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
Dabei ist a_n die Folge der Reihenglieder.
Die Folge $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ heißt **Partialsummenfolge**.
Unter dem Grenzwert (der Summe) der Reihe versteht man den **Grenzwert der Partialsummenfolge**.
Ist die Folge s_n **konvergent bzw. divergent** heißt die Reihe dementsprechend.

Satz Nullfolge Falls die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.1 wichtige Reihen

harmonische Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ die Reihe ist **divergent**.

geometrische Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ die Reihe ist:
konvergent für $|q| < 1$,
divergent für $|q| \geq 1$

arithmetische Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} k = \frac{n(n+1)}{2}$

arithmetische (quadratische) Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

hyperharmonische Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$
konvergent für $\alpha > 1$,
divergent für $\alpha \leq 1$

2.2 Konvergenzkriterien

Cauchykriterium Eine Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, sodass $|\sum\limits_{k=n}^{m} a_n| < \varepsilon$ für alle $m \geq n > N(\varepsilon)$.

alternierende Reihe Eine Reihe heißt alternierend wenn die Folgenglieder a_n abwechselnd positiv und negativ sind.

Konvergenzkriterium von Leibniz Eine alternierende Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ ist konvergent, wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist.

absolut konvergent Eine Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ konvergent ist.

bedingt konvergent Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, ist bedingt konvergent.

Satz Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Riemann'scher Umordnungssatz Eine bedingt konvergente Reihe lässt sich so umordnen, dass sie gegen eine beliebige Zahl (uneigentlich) konvergiert (bspw. $\pm\infty$).

Majorantenkriterium Konvergenzbeweis mittels Abschätzung nach oben durch eine konvergente Reihe.
2 Reihen $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ konvergent ist, so ist $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ absolut konvergent. In diesem Fall nennt man $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ eine Majorante von $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.

Minorantenkriterium Divergenzbeweis mittels Abschätzung nach unten durch eine divergente Reihe.
2 Reihen $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ divergent ist, so ist auch $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ divergent.

2.2.1 Wurzelkriterium

Es gibt eine Zahl q für die gilt:
$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist die Reihe absolut konvergent. $q < 1$ ist wesentlich!!
$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist die Reihe divergent.

Limesform Aus $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe,
für $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ folgt die Divergenz.

2.2.2 Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Falls eine Zahl q existiert sodass gilt:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist die Reihe absolut konvergent.
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n, dann ist die Reihe divergent.

Limesform Aus $\limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ folgt die absolute Konvergenz,
aus $\liminf\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ hingegen die Divergenz.

2.3 Cauchyprodukt

Da die Summe einer konvergenten Reihe als Grenzwert einer Folge definiert ist, ist es möglich die Rechenregeln für Grenzwerte direkt auf Reihen umzulegen.

Rechenregeln

1. $\sum\limits_n (a_n + b_n) = \sum\limits_n (a_n) + \sum\limits_n (b_n)$
2. $\sum\limits_n (\lambda a_n) = \lambda \sum\limits_n (a_n)$

Definition Cauchyprodukt $\sum\limits_{n\geq 0} (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$

Satz Sind 2 Reihen $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = a$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n = b$ absolut konvergent, dann ist auch deren Cauchyprodukt absolut konvergent und es gilt
$\sum\limits_{n\geq 0} (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = ab$

2.4 Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Bauart $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$.
x_0...Entwicklungspunkt
a_n...Koeffizienten der Potenzreihe

Cauchyprodukt von Potenzreihen $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n \sum\limits_{n\geq 0} b_n (x - x_0)^n = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x - x_0)^n$

Satz Konvergenzradius Sei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe. Es existiert ein Konvergenzradius R mit $0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit:

- $|x-x_0| < R$ absolut konvergent, und für
- $|x-x_0| > R$ divergent ist.

$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

- Für $\limsup = \infty : R = 0$ konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$.
- Für $\limsup = 0 : R = \infty$ konvergiert die Potenzreihe in der gesamten Gauß'schen Zahlenebene.

Satz Potenzreihe Es existieren Konstanten $c > 0$ und $0 < q < 1$ für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius R, so dass $|a_n(x-x_0)^n| \leq cq^n$ für alle x mit $|x-x_0| \leq r$ gilt.

3 Asymptotischer Vergleich

S 158 bis S 160

Verwendung in der Performance-Analyse von Algorithmen. Mittels a_n bezeichnen wir die Anzahl der Vergleiche.

3.1 Landau Symbole

2 Folgen: $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$

1. $a_n = O(b_n)$:
   $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \; \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_n = o(b_n)$:
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
3. $a_n \sim b_n$:
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Stirling'sche Formel $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

4 Elementare Funktionen

S 160 bis S 170

Definition Monotonie Analog zu Folgen.

Satz Jede auf einem Intervall I **streng monotone** Funktion $f : I \to f(I)$ ist **bijektiv** und lässt sich daher umkehren. Die Umkehrung ist im gleichen Sinne monoton wie f selbst.

4.1 Polynomfunktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$

4.2 Rationale Funktion

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dabei sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen.
Zu beachten ist, dass Nullstellen von $q(x)$ aus dem Definitionsbereich ausgenommen sein müssen.

4.3 Potenzen mit reellen Exponenten

Satz Die Funktion $f_n(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $f_n(x) = x^n$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist stetig.

Satz Wenn Folge a_n Nullfolge ist, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n} = 1$

negative Exponenten $x^{-n} = (\frac{1}{x})^n$

rationale Exponenten $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{x})^p$

4.4 Exponentialfunktion

Eulersche Zahl $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n$
$e \approx 2,71828$

natürliche Exponentialfunktion $exp(x) = e^x$

allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$

Darstellungen

- Grenzwert einer Folge: $e^x = \lim(1 + \frac{x}{n})^n$
- Potenzreihendarstellung: $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$
- Funktionalgleichung: $e^x e^y = e^{x+y}$

4.5 Logarithmus

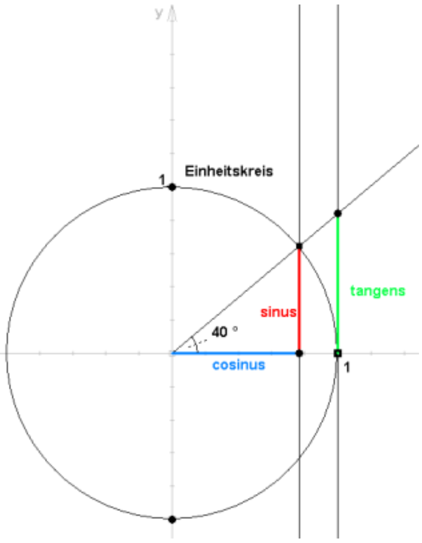
Der Logarithmus stellt die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion dar.

natürlicher Logarithmus $y = \ln x \leftrightarrow x = e^y$

Rechenregeln

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

4.6 Winkelfunktionen



Reihendarstellung

1. $\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
2. $\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Zusammenhänge

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- Rest: siehe diverse Formelsammlungen

Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

5 Grenzwerte und Stetigkeit

S 170 bis S 177

Definition Stetigkeit Eine Funktion ist stetig in einem Punkt x_0 wenn gilt: $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Eine Funktion ist stetig in D wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Stetigkeit von Potenzreihen Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ mit dem Entwicklungspunkt x_0 ist im Konvergenzkreis mit $|x| < R$ stetig.
Da bei elementaren Funktionen der Konvergenzradius ∞ ist sind sie auf $\mathbb{R}$ stetig.

Nullstellensatz von Bolzano f ist im Intervall $[a,b]$ stetig und ist für $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ dann folgt daraus, das f mindestens eine Nullstelle besitzt. Beweis erfolgt mittels Intervallhalbierung.

Zwischenwertsatz f ist im Intervall $[a,b]$ stetig, daraus folgt, dass f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal annimmt.

Satz Eine streng monotone stetige Funktion besitzt eine stetige Umkehrfunktion.

Satz Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig. Daraus folgt, dass auch Zusammensetzungen elementarer Funktionen($f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$) auf geeigneten Definitionsbereich stetig sind

Unstetigkeitsstellen sind Stellen einer Funktion an denen Lücken oder Sprünge bzw. Knicke auftreten. Lücken sind bspw. Ausnahmen des Definitionsbereichs. Sprünge Entsprechen Asymptoten (z.B Tangens). Knicke entstehen bei zusammengesetzten Funktionen.

6 Differentialrechnung

S 182 bis S 204

Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Differentialquotient $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Differenzierbarkeit Eine Funktion heißt differenzierbar im Punkt x_0, falls der Differentialquotient existiert. Der Grenzwert wird Ableitung von f genannt und folgendermaßen notiert $f'(x_0)$.

Satz Aus Differenzierbarkeit in einem Punkt folgt die Stetigkeit in diesem Punkt.

6.1 Ableitungen von Funktionen

- $f(x) = c$
  $f'(x) = 0$
- $f(x) = ax + b$
  $f'(x) = a$
- $f(x) = x^n$
  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sin x$
  $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$
  $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x$
  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $f(x) = e^x$
  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$
  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Betragsfunktion ist nicht differenzierbar.

6.2 Ableitungsregeln

- Konstante Faktoren $(cf(x))' = cf'(x)$
- Lineare Abbildung $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- Produktregel $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quotientenregel $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Kettenregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
- Ableitung von Umkehrfunktionen $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)\frac{d}{dx}$

6.3 Mittelwertsatz

Extremwerte Für ein relatives Extremum an der Stelle x_0 einer Funktion gilt $f'(x_0) = 0$. Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend um ein Extremum zu bestimmen.

relatives/lokales Extremum Ein relatives Maximum ist eine Stelle x_0 einer Funktion für die gilt $\exists U_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$.

absolutes/globales Extremum Ein absolutes Maximum ist eine Stelle x_0 einer Funktion für die gilt $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$.
Minima sind analog zu Maxima definiert.

Satz Differenzierbarkeit $f(x)$ ist genau dann differenzierbar an der Stelle x_0 wenn die Funktion linear approximierbar ist.
$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ mit $R(x) = o(x - x_0)$

Mittelwertsatz der Differentialrechung Die Funktion f ist auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in [a, b] : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Satz von Rolle Die Funktion f ist auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar außerdem ist f(a)=f(b). Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f'(\xi) = 0$.

6.4 Taylorreihe

Satz Die Funktion $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ ist im Konvergenzradius R der Potenzreihe differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren. Daher gilt für alle $|x - x_0| < R$
$f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} na_n(x - x_0)^{n-1}$

Eindeutigkeitssatz Falls $f(x)$ eine Potenzreihendarstellung besitzt ist diese eindeutig.

Satz von Taylor $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$

Restglied von Lagrange $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

6.5 Erste Ableitung

6.5.1 Monotonie

Gilt $f'(x) \geq 0$ nennt man die Funktion $f(x)$ monoton steigend. Ist die strikte Ungleichung erfüllt ist die Funktion streng monoton steigen. Analoges gilt für $f'(x) \leq 0$ dann nennt man die Funktion (streng) monoton fallend.

6.5.2 Extrema

Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ spricht man von einem relativen Maximum, bei $f''(x) > 0$ von einem relativen Minimum.

höhere Ableitungen Falls $f''(x) = 0$ müssen höhere Ableitungen $f^{(n)}(x)$ betrachtet werden.

1. n gerade:
   - $f^{(n)}(x) < 0$ relatives Maximum
   - $f^{(n)}(x) > 0$ relatives Minimum
2. n ungerade: $\exists U_\varepsilon$ dass f in U_ε streng monoton ist.
   - $f^{(n)}(x) < 0$ streng monoton fallend
   - $f^{(n)}(x) > 0$ streng monoton steigend

6.6 Zweite Ableitung

Die zweite Ableitung kann geometrisch als Krümmung der Kurve gedeutet werden.

Satz Ist eine Funktion $f(x)$ 2 mal differenzierbar nennt man die Funktion für:

1. $f''(x) \leq 0$ konkav/nach unten gekrümmt
2. $f''(x) \geq 0$ konvex/nach oben gekrümmt

Die Krümmung kann auch durch eine Sekante durch die Kurve bestimmt werden.

6.6.1 Wendepunkt

Man nennt einen Punkte Wendepunkt wenn die Funktion 3 mal differenzierbar ist und gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

6.7 Verallgemeinerter Mittelwertsatz und l'Hospital

6.7.1 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Die Funktionen f und g sind auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert eine Zwischenstelle für die gilt $\xi \in]a, b[$:
$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

6.7.2 Regel von de l'Hospital

Die Regel von l'Hospital darf nur bei unbestimmten Formen angewandt werden und folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz.
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Damit die Regel angewandt werden kann müssen f und g stetig und differenzierbar sein.

7 Integralrechnung

S 204 bis S 220

7.1 Unbestimmtes Integral

$F(x) = \int f(x)dx$
In diesem Zusammenhang nennt man $F(x)$ die **Stammfunktion**, $f(x)$ den **Integrand** und x die **Integrationsvariable**.
Das unbestimmte Integral wird also dazu verwendet die Stammfunktion zu einer Funktion zu finden. Dabei gibt es nicht nur eine **Stammfunktion** sondern **unendlich viele** die sich alle um die **Integrationskonstante** c unterscheiden.
$G(x) = F(x) + c \Leftrightarrow G'(x) = f(x)$

7.1.1 Grundintegrale

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln(x) + c1 & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int (1 + \tan^2(x))dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \arcsin(x) + c$ für $-1 < x < 1$

7.1.2 Integrationsregeln

- Linearität: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Partielle Integration: $\int (f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
- Substitutionsregel: $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$
  - Leibnitz-Notation: $u = g(x) \Longrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Longrightarrow du = g'(x)dx$
    $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = \int f(u)du$

7.1.3 Partialbruchzerlegung

Um rationale Funktionen der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$ zu integrieren ist es notwendig diesen Bruch in einzelne integrierbare Brüche aufzuspalten.

1. Zuerst wird eine Polynomdivision durchgeführt um auf diese Weise gleich einen Teil des Bruches abzuspalten.
2. Faktorisieren des Nenners.
3. Anschließend wird mittels Koeffizientenvergleich der Rest aufgespalten.

Beispiel $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$
$P(x) = 5x - 4$
$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$
Gleichung ansetzen: $5x - 4 = A(x-2)(x+1) + B(x+1) + C(x-2)^2$
Ausmultiplizieren + Trennung der Variablen:
$0x^2 + 5x^1 - 4x^0 = (A+C)x^2 + (-A+B-4C)x^1 + (-2A+B+4C)x^0$
Koeffizientenvergleich:
$A + C = 0$
$-A + B - 4C = 5$
$-2A + B + 4C = -4$
Lösen des Gleichungssystems führt zur Partialbruchzerlegung.

7.2 Bestimmtes Integral

Geometrisch interpretiert entspricht das bestimmte Integral der Fläche unter einer Kurve.
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ falls $a > b$, und $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
a und b nennt man **Integrationsgrenzen**, x **Integrationsvariable**. Jede Funktion die ein bestimmtes Integral besitzt nennt man **integrierbar**.

Riemannsumme $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$
Bildet man die Riemannsumme über unendlich viele Intervalle spricht man vom bestimmten Integral.
$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ für eine äquidistante Zerteilung

Ober-/Untersummen Wählt man die Zwischenstelle $f(\xi_i) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ spricht man von einer Obersumme. Analog für das Minimum spricht man von der Untersumme.

Satz Jede auf $[a, b]$ definierte monotone Funktion ist integrierbar.

stückweise stetig Eine Funktion ist stückweise stetig, wenn sie auf $[a, b]$ an höchstens endlich vielen Stellen unstetig ist.

Satz Jede auf $[a, b]$ stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Satz Für jede integrierbare Funktion f ist auch $|f|$ integrierbar.

7.2.1 Regeln für bestimmte Integrale

- $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$
- $\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$
- $a \leq c \leq b$
  $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

- $\forall x \in [a,b] f(x) \leq g(x)$
  $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

- $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

- $(b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

7.2.2 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Mittelwertsatz der Integralrechnung $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Hauptsatz f ist eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Dann ist $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f. Jede beliebige Stammfunktion F von f erfüllt:
$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Substitutionsregel für bestimmte Integrale $\int\limits_a^b f(u)du = \int\limits_c^d f(g(x))g'(x)dx$

7.3 Uneigentliche Integrale

erster Art auf $[a,b)$ definiert und auf $[a,c] \subset [a,b)$ integrierbar. Außerdem gilt $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$.
$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)dx$ ist uneigentliches Integral erster Art. Man bezeichnet das Integral als konvergent oder divergent je nachdem ob der Grenzwert im eigentlichen Sinn existiert oder nicht.

zweiter Art auf $[a,b] \subset [a,\infty)$ integrierbar.
$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ ist uneigentliches Integral zweiter Art.

Gammafunktion $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$
Die Gammafunktion stellt eine verallgemeinerung der Fakultät dar. $\Gamma(n+1) = n!$

Majorantenkriterium für Integrale $|f(x)| \leq g(x)$: $\int\limits_1^\infty g(x)dx$ konvergent $\Rightarrow \int\limits_1^\infty f(x)dx$ konvergent.

Integralkritierium f eine nichtnegative monoton fallende Funktion: $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ ist konvergent wenn $\sum\limits_{n=1}^\infty f(x)$ konvergent.

8 Differentialrechnung in mehreren Variablen

bitte beachten, dass es sich bei fast allen »Variablen« in diesem Abschnitt um Vektoren und nicht Skalare handelt. Vektoren sind nicht immer als dergleichen gekennzeichnet, allerdings ist aus dem Kontext ersichtlich das es sich um Vektoren handelt.

S 225 bis S 249

8.1 Funktionen

Es gibt analog zu Funktionen in einer Variable, lineare Funktionen, Polynomfunktionen sowie elementare Funktionen in mehreren Variablen.

Darstellung Die Darstellung von Funktionen in mehreren Variablen geschieht entweder über Niveaulinien (=Isohypen, vergleichbar mit Höhenschichtlinien bei Karten) oder mit Flächen im Raum. Man unterscheidet:

1. **skalarwertige Funktionen** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
2. **vektorwertige Funktionen** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ für Funktionen wo $m = n$ gilt nennt man die Funktion ein Vektorfeld.

8.2 Grenzwerte

ε-Umgebung $U_\varepsilon \vec{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n | ||\vec{x} - \vec{x_0}|| < \varepsilon\}$
Diese Definition der Umgebung lässt die geometrische Interpretation eines Kreis (für $n = 2$) bzw. einer Kugel (für $n = 3$) zu.

Grenzwert Der Limes ist analog zu Funktionen in einer Variable definiert, nur das man hierbei Vektoren anstatt Skalaren betrachtet. Notiert wird das ganze folgendermaßen

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f\vec{x} = c$$

8.3 Stetigkeit

Stetigkeit in Punkt Eine Funktion heißt stetig an der Stelle $\vec{x_0}$, wenn sowohl Grenzwert als auch Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmen.

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f\vec{x} = f(\vec{x_0})$$

Stetigkeit auf Definitionsbereich Eine Funktion heißt stetig auf D wenn f an jeder Stelle x_0 stetig ist. Dabei ist wichtig, dass die Annäherung an $\vec{x_0}$ nicht nur gerade von verschiedenen Richtungen erfolgen darf. Es ist notwendig sich z.B. radial anzunähern. Etwas konkreter muss der Limes für jede Annäherungsfolge übereinstimmen.

offene Menge Eine Menge heißt offen, wenn aus $\vec{x} \in D$, dass es eine $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq D$ gibt.

abgeschlossene Menge Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder Konvergenten Folge $a_n \in D$ wieder in D liegt.

kompakte Menge Eine abgeschlossene beschränkte Menge ist kompakt.

Satz ist D eine kompakte Menge und f eine stetige Funktion ist f auf D beschränkt und besitzt ein Extremum.

8.4 Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen sind wie Ableitungen einer Funktion in einer Variable anzuwenden. Nur leitet man in alle verschiedenen Koordinatenrichtungen ab. Also bei einer Funktion in 2 Variablen leitet man nach x und nach y ab. Die jeweiligen anderen Variablen betrachtet man als Konstanten. Man definiert nun 2 Grenzwerte als **partielle Ableitungen**:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

und

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Existieren beide Grenzwerte heißt die Funktion **partiell differenzierbar**. Sind die Ableitungen stetig heißt sie **stetig partiell differenzierbar**.

8.4.1 Partielle Ableitungen höhere Ordnung

Die höheren Ableitungen werden wieder rekursiv definiert, nur gibt es diesmal eine »Mischform«.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial f_x}{\partial x}(x, y) \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) \\
f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y) \\
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y)
\end{aligned}$$

Tangentialebene Die Tangentialebene im Punkt x_0, y_0 ist beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz Für eine Funktion deren partielle Ableitungen f_{xy} und f_{yx} existieren und stetig sind, gilt $f_{xy} = f_{yx}$. Ist f m-mal stetig partiell differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Differentation von vektorwertigen Funktion Eine vektorwertige Funktion ist partiell differenzierbar wenn alle Koordinatenfunktionen differenzierbar sind.

8.5 Differentialrechnung

8.5.1 totale Ableitung

Eine Funktion nennt man im Punkt x_0 total differenzierbar falls eine lineare Abbildung $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass gilt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + R(x)$$

für den Rest $R(x)$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||R(x)||}{||x - x_0||} = 0$$

Jacobi-Matrix Die Matrix $A = (\mathrm{grad}\, f)^T$ der oben beschriebenen linearen Abbildung f' nennt man Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix). Diese Abbildung ist die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0.

Gradient Der Gradient entspricht der transponierten Funktionalmatrix A.

$$\mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

vollständiges Differential

$$df = \mathrm{grad}\, f(\vec{x_0}) d\vec{x} = f_{x_1} dx_1 + \ldots + f_{x_n} dx_n$$

Jacobi-Matrix für vektorwertige Funktionen

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

8.5.2 Ableitungsregeln (skalarwertige Funktionen)

Summenregel

$$(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$$

Produktregel

$$\mathrm{grad}\, h(\vec{x_0}) = f(\vec{x_0})\, \mathrm{grad}\, g(\vec{x_0}) + g(\vec{x_0})\, \mathrm{grad}\, f(\vec{x_0})$$

Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{dg_i}{dx}$$

Kettenregel für vektorwertige Funktionen Entspricht Matrizenmultiplikation der Jacobi-Matrizen.

Hauptsatz über implizite Funktionen

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

8.5.3 Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + \vec{v}) - f(\vec{x})}{t} = \mathrm{grad}\, f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$$

Gradientenrichtung Die Ableitung ist in Gradientenrichtung am größten und beträgt $||\,\mathrm{grad}\, f||$

8.6 Taylorentwicklung

Grundsätzlich lässt sich die Formel aus der, der Taylorentwicklung in einer Variable einfach herleiten. Man muss jetzt nur die partiellen Ableitungen in alle Richtungen berücksichtigen.
Da die Summenschreibweise absolut unübersichtlich ist, notiere ich die Formel hier nur beispielhaft:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left((x-x_0)\,f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0)\right) +$$
$$\frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2\,f_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)\,f_{xy}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + (y-y_0)^2\,f_{yy}(x_0,y_0)\right) +$$
$$\frac{1}{3!}\left((x-x_0)^3\,f_{xxx} + 3(x-x_0)^2\,(y-y_0)\,f_{xxy} + 3(x-x_0)\,(y-y_0)^2\,f_{yyx} + (y-y_0)^3\,f_{yyy}\right) + \dots$$

Hesse-Matrix Die Matrix der partiellen Ableitungen 2. Ordnung nennt man Hesse-Matrix. Man notiert sie folgendermaßen:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_1,\dots,x_n) & \dots & f_{x_1x_n}(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_1,\dots,x_n) & \dots & f_{x_nx_n}(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

8.7 Bestimmung von Extrema

Satz Eine Funktion$f$ hat in $\vec{x}$ ein relatives Extremum. Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0$$

Punkte für die der Satz gilt nennt man stationäre Punkte. In diesen Punkten ist die Tangentialebene waagrecht. Die Anstiege in alle Koordinatenrichtungen ist 0. Diese Bedingung für relative Extrema ist allerdings nur notwendig aber noch nicht hinreichend.

Satz Definitheit der Hesse-Matrix Ist ein Punkt $\vec{x_0}$ ein stationärer Punkt und ist $H(\vec{x_0})$

- **positiv definit** dann besitzt f an der Stelle $\vec{x_0}$ ein relatives **Minimum**.
- **negativ definit** dann besitzt f an der Stelle $\vec{x_0}$ ein relatives **Maximum**.
- **indefinit** dann besitzt f an der Stelle $\vec{x_0}$ einen **Sattelpunkt**.

8.7.1 Bestimmung der Definitheit

- Matrix G heißt positiv definit: $f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot G \cdot \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in R^n \setminus \{0\}$
- Matrix G heißt negativ definit: $f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot G \cdot \vec{x} < 0, \forall \vec{x} \in R^n \setminus \{0\}$
- Ansonsten heißt Matrix G indefinit.

Wie feststellen ob positiv/negativ definit?

1. Spektralsatz:
   - positiv definit: alle Eigenwerte ¿ 0
   - negativ definit: alle Eigenwerte ¡ 0
   - indefinit: Mischung
2. Hauptminorenkriterium
   - positiv definit: alle Hauptminoren > 0
   - negativ definit: alle ungeraden Hauptminoren < 0, alle geraden Hauptminoren > 0
   - indefinit: $\det(H_f) < 0$

Spektralsatz In einer symmetrischen reellen Matrix $a \subseteq R^{n \times n}$ gilt:
Es gibt reelle Eigenwerte und eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot P^T$$

Hauptminorenkriterium Die Hauptminoren einer Matrix bestimmen sich aus den **Determinanten der Untermatrizen**.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$1.Hauptminor = \det(A_1) = 1; \quad 2.Hauptminor = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$3.Hauptminor = \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

8.7.2 Extrema mit Nebenbedingungen

Reduktionsmethode Ausdrücken einer Variable durch die andere. Anschließend einfache Bestimmung des Extremwertes.

Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren Falls f in $\vec{x_0}$ ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\vec{x}) = 0; \quad g_2(\vec{x}) = 0; \quad \ldots \quad g_m(\vec{x}) = 0;$$

besitzt und falls

$$\operatorname{grad} g_1(\vec{x_0}); \quad \ldots \quad \operatorname{grad} g_m(\vec{x_0});$$

linear unabhängig sind, dann existieren Vektoren

$$\lambda_1 \quad \ldots \quad \lambda_m \in \mathbb{R}^m$$

die die Funktion

$$F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot g(\vec{x})$$

bilden. Diese Funktion erfüllt dann die Gleichung

$$\operatorname{grad} F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \vec{0}$$

Daraus lässt sich dann ein lineares Gleichungssystem auslesen. Durch einsetzen in die Nebenbedinungen erhält man dann konkrete Kandidaten-Punkte welche dann noch näher überprüft werden müssen.

9 Differentialgleichungen

S 289 bis S 302

Differentialgleichungen sind Gleichungen in denen Ableitungen der Funktion vorkommen. Wie schon bei den Differenzengleichungen gilt $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Die Lösung der DGL ist also die Lösung der homogenen DGL + die Partikulärlösung der inhomogenen DGL.

Ordnung Die Ordnung der DGL ist durch die höchste auftretende Ableitung gegeben.

9.1 Lineare DGL erster Ordnung

$$y'(x) + a(x)y(x) = s(x)$$

dabei ist $y(x)$ die gesuchte Funktion, $a(x), s(x)$ sind stetige Funktionen und $s(x)$ ist die Störfunktion.

1. $s(x) = 0$ homogene DGL
2. $s(x) \neq 0$ inhomogene DGL

Grundsätzliches Vorgehen

1. Lösung der homogenen DGL mittels ≫Trennung der Variablen≪
2. Bestimmung der partikulären Lösung mittels ≫Variation der Konstanten≪
3. ermitteln der Lösungsgesamtheit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

9.1.1 homogene DGL (Trennung der Variablen)

In der Leibniz-Schreibweise sieht das Ganze folgendermaßen aus:

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow \ln(|y|) = -\int a(x)dx+C \Rightarrow y_h(x) = e^C e^{-\int a(x)dx}$$

Lösung $A(x) = -\int a(x)dx$ und $\tilde{c} = e^C$:

$$y_h(x) = \tilde{c}e^{-A(x)}$$

9.1.2 inhomogene DGL (Variation der Konstanten)

Ersetzen der Konstante c in der homogenen Lösung durch $c(x)$

$$y_p(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

Einsetzen der angesetzten Partikulärlösung in die ursprüngliche DGL $c'(x) + a(x)y(x) = s(x)$
Lösen der Gleichung und einsetzen von $c(x)$ in $y_p(x)$.
Man erhält eine Partikulärlösung wie:

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \int s(x)e^{A(x)}dx$$

9.2 Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

9.2.1 Exponentialansatz

Bei den Differenzengleichungen gab es den Potenzansatz. Dieses Konzept gibt es auch bei den DGL. Hier heißt dieser Ansatz Exponentialansatz.
Dazu setzt man $y_h(x) = e^{\lambda x}$ an. Diesen Ansatz setzt man in die homogene DGL ein.

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Mittels dieser charakteristischen Gleichung kann man dann die Nullstellen suchen. Dabei gibt es 3 Fälle:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 2 reelle Lösungen $D > 0$
$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 2 konjugiert komplexe Lösungen $D < 0$
$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$
3. $\lambda_1 = \lambda_2$ 1 reelle Lösung $D = 0$ (Resonanzfall)
$$(C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$$

9.2.2 Methode des unbestimmten Ansatzes

Bei dieser Methode wird ein Versuchslösung zur entsprechenden Störfunktion gesucht. Dabei verwendet man die Ansätze aus der untenstehenden Tabelle. Dabei ist der sogenannten **Resonanzfall** zu beachten.

Resonanzfall Vom Resonanzfall spricht man, wenn ein Summand der Versuchslösung bereits Lösung der homogenen Gleichung ist. Dann ist der **Lösungsansatz** mit x (gegebenenfalls sogar mehrfach) zu **multiplizieren**.
Genauer wird der Exponent zu x über die Vielfachheit von r bestimmt. Zwar folgendermaßen $x^{V(r)}$. Dabei bezeichnet $V(r)$ die Vielfachheit von r als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Bestimmung der Vielfachheit Hat das Polynom für r keine Nullstellen ist $V(r) = 0$, hat das Polynom und die erste Ableitung eine Nullstelle für r ist $V(r) = 2$.
Beispielsweise beim Ansatz $y_p(x) = Ae^{-2x}x^{V(r)}$ und dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ist die Vielfachheit $V(r) = 2$. Wie man leicht durch Einsetzen von -2 als λ überprüfen kann.

9.2.3 mögliche Versuchslösungen

Störfunktion	Versuchslösung
1	A
e^{rx}	Ae^{rx}
$\sin(rx)$ oder $\cos(rx)$	$A\sin(rx) + B\cos(rx)$
$a_0 + a1_x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_kx^k$
$(a_0 + a1_x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k)e^{rx}$	$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_kx^k)e^{rx}$

9.3 Lineare DGL k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Analog zu DGL zweiter Ordnung lösbar. Das heißt ebenfalls mit Exponentialansatz. Das charakteristische Polynom hat folgende Form:

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Die Lösung in den komplexen Zahlen (P sind dabei die Polynome vom Grad k):

$$y(x) = P_{1,k_1-1}(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_{l,k_l-1}(x)e^{\lambda_l x}$$

Bei Störfunktionen ist wiederum der »unbestimmte Ansatz« zu verwenden.

9.4 Separable Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = f(x)g(y)$$

Man führt wiederum Trennung der Variablen durch. Alle y auf eine Seite, alle x auf die andere Seite. Anschließend kann man auf beiden Seiten nach den jeweiligen Variablen integrieren und erhält somit eine allgemeine Lösung der DGL.

10 Numerische Mathematik

S 388 bis S 395

kommt wahrscheinlich nicht zur Prüfung am 03.07.2012

10.1 Bisektion

Intervallhalbierung zum finden von Nullstellen.

10.2 Regula falsi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

10.3 Newton'sches Näherungsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

11 Integralrechung in mehreren Variablen

kommt nicht zur Prüfung am 03.07.2012