Beispiel 11 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 5, 27.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit. (Hinweis: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$):

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \qquad \text{fuer} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{und} \quad f(0,0) = 0$$

2 Lösung des Beispiels

Wir halten uns die Bedingung für doe Stetigkeit vor Augen:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Zuerst untersuchen wir $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Hier liegt eine Stetigkeit in allen Punkten vor, denn der gesamte Term ist durch stetige Teile Summe, Produkt und Division (kann nicht Null werden) zusammengesetzt. Daher in $\mathbb{R}$ stetig.

$$a + b \geq 2 \cdot \sqrt{ab} \qquad \to \qquad x^2 + y^2 \geq 2 \cdot \sqrt{x^2y^2} = 2xy \qquad \to \qquad \tfrac{1}{x^2+y^2} \leq \tfrac{1}{2xy}$$

Wir untersuchen nun den Fall $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und betrachten den Zähler (beachte o.g. Umformung als Vergleichskriterium!):

$$xy^2 + x^2y > 0 \qquad \to \qquad 0 \leq \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$xy^2 + x^2y < 0 \qquad \to \qquad 0 \geq \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \geq \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$xy^2 + yx^2 = 0 \qquad \to \qquad 0 = \frac{0}{x^2 + y^2} \geq \frac{0}{2xy}$$

Nun betrachten wir den Grenzwert nach den verschiedenen Fällen:

$$xy^2 + x^2y > 0 \qquad \to \qquad lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$xy^2 + x^2y < 0 \qquad \to \qquad lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \leq 0$$

$$xy^2 + yx^2 = 0 \qquad \to \qquad lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Daraus folgt die Stetigkeit bei $f(0,0)$, denn:

$$0 \leq lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{stetig in} \quad f(0,0)$$