

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 3

13. Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} (x + 1)^n.$$

14. Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $4,5n^2 - 1,5n + 0,1$

(b) $4,5 \cdot 2^n + 5n^5$

(c) $\sqrt{1 + 2,5n^2}$.

Ferner zeige man, dass

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

15. Mit Hilfe der Stirling'schen Approximationsformel zeige man, dass

$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}.$$

16. Man leite die Funktionalgleichung $e^x e^y = e^{x+y}$ für die Exponentialfunktion aus deren Potenzreihendarstellung durch Bildung des Cauchyprodukts der entsprechenden Potenzreihen her.

17. Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = 1/\cos x, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad f_4(x) = |\cos x|, \quad f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$

im Intervall $[0, \pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit.

18. Die Abbildungen $\sinh, \cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Man skizziere die Graphen der beiden Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen (wo sind diese überhaupt definiert?), und bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.