

6. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit 3 Zuständen ist

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufige Übergangsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

2. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen.

4. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen.

6. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$. die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

7. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

Teillösungen zur Selbstkontrolle

1.

$$P^t = \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^t \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2.

$$P^t = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 11 \end{pmatrix} + \frac{0.4^t}{12} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} + \dots$$

3. $K_2 = \{2, 3\}$.

4.

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

5. Hier gibt es zwei Klassen.

6.

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \dots$$

7. Hier sollten Sie eigentlich sofort die beiden absorbierenden Zustände sehen.

$$P^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \dots$$