27. Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung $x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}, n = 0, 1, 2, \ldots$

die allgemeine Form einer linearen Differenzengleichung 1. Ordnung sieht so aus:
$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, n \in N$

wir haben eine inhomogene Differenzengleichung, da $b \neq 0 : x_{n+1} = a_n x_n + b_n$, also ist die zugehörige allgemeine Lösung $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$

so zu erst nehmen wir mal die homogene Differenzengleichung $x_{n+1} = a_n x_n$ her und rechnen uns die allgemeine Lösung mit $x_n^{(h)} = c \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ aus, also:

homogene Differenzengleichung: $x_{n+1} = a_n x_n \Rightarrow x_{n+1} = 3^{2n} x_n$

homogene Lösung: $x_n^{(h)} = c \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i \Rightarrow x_n^{(h)} = c \cdot \prod_{i=0}^{n-1} 3^{2i}$

nun wenden wir für die **homogene Lösung** einen kleinen Trick an: 3 wird quadriert und oben bleibt der Zähler i (= n) über, dann ergibt 0, 1, … n die arithmetische Reihe $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ und nun schreiben wir wieder die Basis mit 3 an und es kürzt sich der Divisor der arithmetischen Reihe weg:

$$x_n^{(h)} = c \cdot \prod_{i=0}^{n-1} 3^{2i} = c \cdot \prod_{i=0}^{n-1} 9^i = c \cdot 9^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} = c \cdot 3^{2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}} = c \cdot 3^{n \cdot (n-1)}$$

jetzt fehlt noch eine **feste partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung**, dafür wenden wir die „Variation der Konstanten“ an:

$x_n^{(h)} = c \cdot 3^{n \cdot (n-1)} \Rightarrow$ Ansatz $x_n^{(p)} = c_n \cdot 3^{n \cdot (n-1)}$ und nun in die Differenzengleichung

$x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}$ einsetzen:

$$c_{n+1} \cdot 3^{(n+1) \cdot ((n+1)-1)} = 3^{2n} \cdot c_n \cdot 3^{n \cdot (n-1)} + 3^{n^2}$$

$$c_{n+1} \cdot 3^{(n+1) \cdot n} = c_n \cdot 3^{n \cdot (n-1) + 2n} + 3^{n^2}$$

$$c_{n+1} \cdot 3^{n^2+n} = c_n \cdot 3^{n^2-n+2n} + 3^{n^2}$$ $\Rightarrow$ alles durch 3^{n^2+n} dividieren

$$c_{n+1} = c_n + \frac{3^{n^2}}{3^{n^2+n}} = c_n + \frac{1}{3^n} \Rightarrow c_{n+1} = c_n + \frac{1}{3^n}$$

$c_n = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} \Rightarrow$ das ist die unendliche geometrische Reihe: $\frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}$

$$c_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{3-1}{3}} = \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow c_n = \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{3}{2}$$ und das in den Ansatz einsetzen

und man erhält eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x_n^{(p)} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot 3^{n \cdot (n-1)}$$

nun nur mehr die beiden Teillösungen zusammenführen $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ und man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x_n = c \cdot 3^{n \cdot (n-1)} + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot 3^{n \cdot (n-1)}$$