6. Übung - Differenzengleichungen

Beispiel 200

Gesucht sind alle Lösungen von $(a)\quad 2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0$ und $(b)\quad x_{n+1} - x_n + 7 = 0$, jeweils für $n \geq 0$.

Um diese *lineare Differenzengleichung erster Ordnung* zu lösen, verwenden wir die im Buch auf Seite 273 für die explizite Gleichung $x_{n+1} = ax_n + b$ hergeleitete Formel:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + bn & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

Um die Koeffizienten a und b ablesen zu können, müssen wir also zuerst die beiden gegebenen Gleichungen auf die explizite Form bringen:

$$\begin{array}{llclcl} (a) & 2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0 & \Leftrightarrow & x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{1}{2} & \Rightarrow & a = \frac{3}{2} \text{ und } b = -\frac{1}{2} \\ (b) & x_{n+1} - x_n + 7 = 0 & \Leftrightarrow & x_{n+1} = x_n - 7 & \Rightarrow & a = 1 \text{ und } b = -7 \end{array}$$

Wenn wir jetzt in obige Formel einsetzen, dann bekommen wir die Lösungen:

$$(a)\quad x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_0 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^n \underbrace{(x_0 - 1)}_{=:C} + 1$$

$$(b)\quad x_n = \underbrace{x_0}_{=:C} + (-7)n$$

Da kein bestimmter Anfangswert für x_0 gegeben ist, kann x_0 durch C ersetzt werden.

Beispiel 203

Gesucht ist die allgemeine Lösung von $x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}$ für $n \geq 0$.

In diesem Fall haben wir es mit einer *allgemeinen linearen Differenzengleichung erster Ordnung* der Form $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ zu tun, wobei $a_n = 3^{2n}$ und $b_n = 3^{n^2}$ der Störterm der Gleichung ist. Wir gehen nach folgendem Kochrezept vor:

1. Suche die allgemeine Lösung (das ist eine ganze Lösungsschar) der homogenen Gleichung $x_{n+1} = a_n x_n$, die sogenannte homogene Lösung $x_n^{(h)}$.
2. Suche eine (und das heißt eine einzige, beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$, die sogenannte partikuläre Lösung $x_n^{(p)}$, z.B. mittels Variation der Konstanten oder mit der Methode des unbestimmten Ansatzes.
3. Bilde die Lösungsgesamtheit durch $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Homogene Lösung

Wir möchten die homogene Gleichung $x_{n+1} = 3^{2n} x_n$ lösen. Dann folgt (indem wir rückwärts immer wieder passend einsetzen) aus

$$x_n = a_{n-1} x_{n-1} = a_{n-1} a_{n-2} x_{n-2} = \cdots = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} a_i,$$

dass unsere homogene Lösung (x_0 wieder durch C ersetzen) durch $x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} 3^{2i}$ gegeben ist. Wir müssen also noch das Produkt ausrechnen. Dabei verwenden wir die Gauß'sche Summenformel $\sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$, um folgendes zu berechnen:

$$\prod_{i=0}^{n-1} 3^{2i} = 3^{2 \cdot 0} \cdot 3^{2 \cdot 1} \ldots 3^{2 \cdot (n-1)} = 3^{\sum_{i=0}^{n-1} 2i} = 3^{2 \sum_{i=0}^{n-1} i} = 3^{2 \frac{n(n-1)}{2}} = 3^{n^2 - n}$$

Die homogene Lösung ist also $x_n^{(h)} = C \cdot 3^{n^2 - n}$.

Partikuläre Lösung

Als nächstes betrachten wir die inhomogene Gleichung $x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}$ und suchen eine partikuläre Lösung davon. Wenn wir die Tabelle mit Störfunktionen auf Seite 285 zu Rate ziehen, so sehen wir, dass unsere Störfunktion b_n keinem der angeführten Fälle entspricht, insbesondere nicht dem Fall r^n, da unsere Störfunktion von der Form r^{n^2} ist und die Versuchslösung nicht einfach mal so an unser Problem "angepasst" werden kann! Tatsächlich würde man etwa mit dem Ansatz $x_n^{(p)} = A r^{n^2}$ auf einen Ausdruck kommen, der am Ende, wenn man ihn wieder in die Differenzengleichung einsetzt, auf eine falsche Aussage führt, d.h. keine Lösung dieser ist. Da wir eine Lösung wollen, darf so etwas nicht vorkommen!

Wir versuchen also unser Glück mit einer Variation der Konstanten, d.h. wir nehmen die homogene Lösung und machen C ebenfalls von n abhängig. Unser Ansatz schaut also so aus: $x_n^{(p)} = C_n \cdot 3^{n^2-n}$. Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in die inhomogene Differenzengleichung ein und erhalten (beachte: auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen verwenden wir den Index $n+1$, auf der rechten Seite den Index n):

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(h)} &= 3^{2n} x_n^{(h)} + 3^{n^2} && \mid \text{einsetzen} \\ C_{n+1} \cdot 3^{(n+1)^2-(n+1)} &= 3^{2n} \cdot C_n \cdot 3^{n^2-n} + 3^{n^2} && \mid \text{zusammenfassen} \\ C_{n+1} \cdot 3^{n^2+n} &= C_n \cdot 3^{n^2+n} + 3^{n^2} && \mid : 3^{n^2+n} \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

Wir haben also eine neue, aber relativ einfach zu lösende Differenzengleichung erhalten von der wir irgendeine Lösung suchen - speziell können wir also den Startwert $C_0 = 0$ setzen. Beachte, dass wir hier nicht die Methode von Beispiel 200 anwenden können, weil dies nur für *konstante* Koeffizienten a und b möglich war - hier hängt $\frac{1}{3^n}$ aber ganz offensichtlich von n ab! Wir lösen die Differenzengleichung also durch Aufsummieren und erkennen, dass wir hier eine endliche geometrische Reihe vorliegen haben, für die wir eine Summenformel kennen (oder nachschlagen):

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{-i} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Also haben wir eine partikuläre Lösung der Gestalt $x_n^{(p)} = C_n \cdot 3^{n^2-n} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) 3^{n^2-n}$ gefunden.

Lösungsgesamtheit

Als allgemeine Lösung ergibt sich

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot 3^{n^2-n} + \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) 3^{n^2-n} = 3^{n^2-n}\left(C + \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right)$$

Zusatz: Was passiert, wenn ein Anfangswert x_0 gegeben ist?

Angenommen, wir hätten noch $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann müssten wir in der allgemeinen Lösung jetzt noch C bestimmen. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\alpha = x_0 = 3^{0^2-0}\left(C + \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^0}\right)\right) = C$$

Wir müssten also nur das C durch unseren Startwert x_0 ersetzen.

Beispiel 213

Gesucht: Die Lösung folgender Differenzengleichung zweiter Ordnung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36, \qquad x_0 = 6, \quad x_1 = 3$$

Homogene Lösung

In unserem Fall lautet die zu lösende homogene Gleichung

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 0 \tag{1}$$

Setzt man den Ansatz $x_n^{(h)} = \lambda^n$ in Gleichung (1) ein, erhält man die charakteristische Gleichung

$$4\lambda^{n+2} + 12\lambda^{n+1} - 7\lambda^n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\lambda^2 + 12\lambda - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 + 3\lambda - \frac{7}{4} = 0$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung mittels kleiner Lösungsformel
($x^2 + px + q = 0 \Rightarrow {}_2x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$) ergibt folgende Lösungen: $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{7}{2}$
Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^n.$$

Partikuläre Lösung

Da die Störfunktion $s_n = 36$ konstant ist, kann der Ansatz $x_n^{(p)} = A$ (siehe Tabelle Seite 285) zur Bestimmung einer partikulären Lösung verwendet werden.

Einsetzen des Ansatzes in die Differenzengleichung ergibt

$$4A + 12A - 7A = 36 \quad \Longrightarrow \quad A = 4$$

Eine partikuläre Lösung ist somit $x_n^{(p)} = 4$.

Allgemeine Lösung

Die Lösung der allgemeinen Differenzengleichung lautet

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^n + 4 \tag{2}$$

Anfanswerte einsetzen

Das Einsetzen der Anfangswerte $x_0 = 6$ und $x_1 = 3$ in (2) ergibt:

$$\begin{aligned}
x_0 = 6 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^0 + 4 &\iff 6 = c_1 + c_2 + 4 \iff c_1 = 2 - c_2 \\
x_1 = 3 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^1 + 4 &\iff 3 = c_1 \cdot \frac{1}{2} - c_2 \cdot \frac{7}{2} + 4 \iff c_1 = -2 + 7c_2 \\
&\implies 2 - c_2 = -2 + 7c_2 \implies c_2 = \frac{1}{2} \implies c_1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Lösung

Die gesuchte Lösung ist somit

$$x_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^n + 4$$

Beispiel 238

Sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.
Gesucht: Die Rekursion der gesuchten Zahlen a_n und die Lösung dieser.

Gesuchte Rekursion

Die gesuchte Rekursion mit dazugehörigen Anfangswerten lautet

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 1, a_1 = 2,$$

Diese ist folgendermaßen zu erklären:
Die Anzahl aller gesuchten Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n+2\} =$
(Anzahl aller gesuchten Teilmengen ohne das Element n+2, dies entspricht genau der Anzahl der gesuchten Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n+1\}$) $\quad +$
(Anzahl aller gesuchten Teilmengen mit dem Element n+2, dies entpricht genau der Anzahl der gesuchten Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$).
Die leere Menge hat genau eine Teilmenge (sich selbst), dh. $a_0 = 0$, die einelementige Menge hat die leere Menge und sich selbst als Teilmengen, daher $a_1 = 2$.

Lösung der Rekursion

Die zu lösende Differenzengleichung lautet

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

Es handelt sich um eine homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung.
Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad {}_2\lambda_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Da es sich um eine homogene Differenzengleichung handelt, ist es nicht notwendig eine partikuläre Lösung zu berechnen, daher lautet die Lösung der allgemeinen Gleichung

$$a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$$a_0 = 1 = c_1 + c_2 \Longrightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$a_1 = 2 = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 2 = (1 - c_2) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow c_2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} \Longrightarrow c_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}}$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$