383)

$$x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0$$

Ansatz $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$x^2 \cdot X'(x) \cdot Y'(y) + 3y^2 X(x) Y(y) = 0$$

$$x^2 X'(x) + 3y^2 X(x) \frac{Y(y)}{Y'(y)} = 0$$

$$x^2 \cdot \frac{X'(x)}{X(x)} + 3y^2 \frac{Y(y)}{Y'(y)} = 0$$

$$x^2 \cdot \frac{X'(x)}{X(x)} = -3y^2 \frac{Y(y)}{Y'(y)} = \lambda \in \mathbb{C}$$

da rechts in x und links in y konstant

$$x^2 \cdot X'(x) = X(x) \cdot \lambda \qquad -3y^2 Y(y) = Y'(y) \cdot \lambda$$

$$x^2 X' - \lambda X = 0 \qquad Y'(x) + \frac{3y^2}{\lambda} Y(y) = 0$$

$$\cancel{X - \frac{x^2}{\lambda} X' = 0} \qquad \frac{Y'}{Y} = -\frac{3y^2}{\lambda}$$

$$X' - \frac{\lambda}{x^2} X = 0 \qquad \ln Y = -\frac{1}{\lambda} \cdot y^3$$

$$Y = e^{-\frac{y^3}{\lambda}} \cdot C$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{\lambda}{x^2}$$

$$\frac{1}{X} dX = \frac{\lambda}{x^2} dx \quad = \quad \ln|X| = \lambda \cdot \cancel{\ln x} - \frac{1}{x}$$

$$u(x,y) = e^{-\frac{\lambda}{x}} \cdot e^{-\frac{y^3}{\lambda}} \cdot C \qquad \underline{X = e^{\cancel{*}-\frac{\lambda}{x}} \cdot C}$$

384)

$$9 u_{xx} + u_{yy} = 27u$$

$$u(x,y) = F(x) + T(y)$$

$$9 \cdot F'' + T'' = 27F + 27T$$

$$9 \cdot F'' - 27F = 27T - T'' = \lambda \in \mathbb{C}$$

da beide Seiten von versch. Variablen abhängen

$9 \cdot F'' - 27F = \lambda$ → Dgl 2. Ordnung

$F'' - 3F = \frac{\lambda}{9}$ Exp.ansatz

$\alpha^2 - 3 = 0$ → $\alpha = \pm\sqrt{3}$

$F(x)_h = C_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x}$

Ansatz A → Methode des unbestimmten Ansatzes

$$-27A = \lambda$$

$$A = \frac{\lambda}{-27}$$

$$F(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\lambda}{-27}$$

$27T - T'' = \lambda$

$T'' - 27T = -\lambda$ → Exp-Ansatz

$\alpha^2 - 27 = 0$

$\alpha^2 = 27$ → $\alpha = \pm\sqrt{27}$

$T(y)_p = C_3 \cdot e^{\sqrt{27}y} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{27}y}$

Ansatz A

$$-27A = -\lambda$$
$$A = \frac{\lambda}{27}$$

$$T(y) = C_3 \cdot e^{\sqrt{27}y} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{27}y} + \frac{\lambda}{27}$$

$$U(x,y) = F(x) + T(y) = C_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x} + C_3 \cdot e^{\sqrt{27}y} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{27}y} + \frac{\lambda}{27} + \frac{-\lambda}{27}$$
$$= C_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x} + C_3 \cdot e^{\sqrt{27}y} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{27}y}$$

400)

Satz 9.7

Eie Fkt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ erfüllt Lipschitzbedingung mit Konstante λ wenn φ stetig diffbar und $|\varphi'| \leq \lambda$ wobei $0 < \lambda < 1$

$\varphi(x) = x - e^{-x} + \cos(x)$ $\qquad [1{,}2 \, ; \, 1{,}3]$

$\varphi'(x) = 1 + e^{-x} - \sin(x)$

$\varphi''(x) = -e^{-x} - \cos(x)$ $\qquad$ negativ für $x \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi] \,/\, [0, 1{,}57]$

$\Rightarrow$ Intervall enthalten

$\Rightarrow$ ~~φ' = fallend $\Rightarrow$ negativ~~

~~daher ist~~

φ' = fallend $\Rightarrow$ $\varphi'(1{,}2) = 0{,}369$

$\varphi'(1{,}3 = 0{,}308$

$\Rightarrow$ in $[1{,}2 ; 1{,}3]$ liegen alle Fktwerte ~~dd~~ d.i. von φ' zwischen 0 und 1

$\Rightarrow$ Satz 9.7 erfüllt

Fixpunkt

Iterationsfolge x_n mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$\varphi(1{,}2) = 1{,}26$

$\varphi(1{,}26) \cong 1{,}28$

$\varphi(1{,}28) \cong 1{,}28 \ldots$

$\varphi(1{,}28) \cong 1{,}29$

$\vdots$

konvergiert gegen $1{,}3 \to$ Fixpunkt