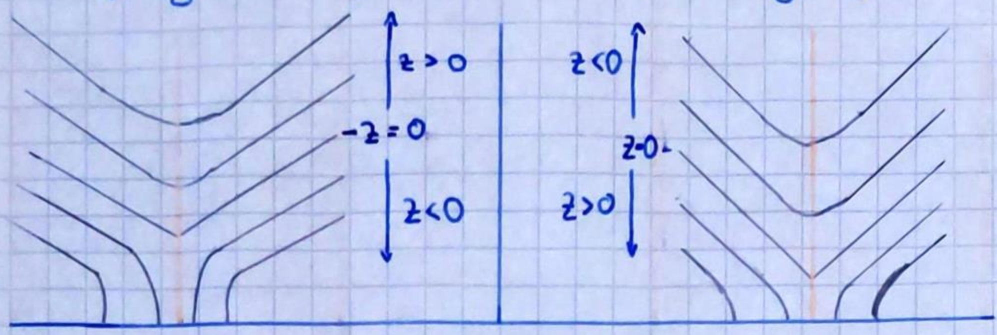
Analysis 2 Übung

1) Höhenlinien erstellen + Wertebereich festlegen

a) $z = x^2 - y^2$ Wertebereich : $\mathbb{R}^+$

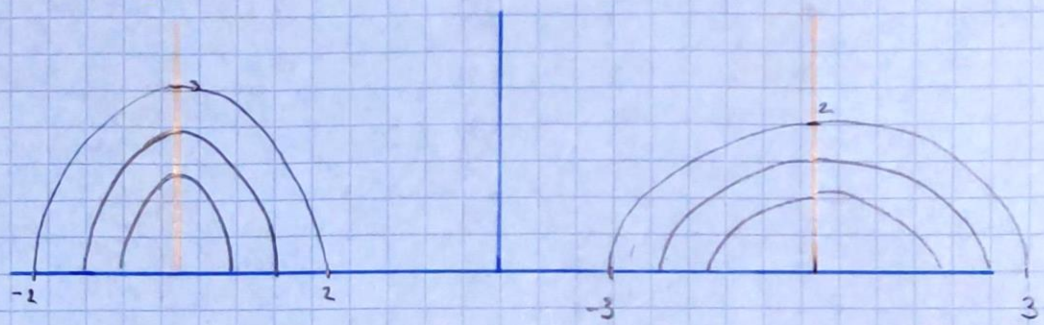
i) $y = \sqrt{x^2 - z_0}$ ii) $x = \sqrt{y^2 + z_0}$



b)

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

i) $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - z_0^2} \cdot 3$ ii) $x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9} - z_0^2} \cdot 2$



Analysis 2 Übung

8)

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$

$$f_x = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y = \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$f(x_0, y_0) \approx 0{,}9327$

$f_x(x_0, y_0) \approx 0{,}2144$

$f_y(x_0, y_0) \approx 0{,}3216$

Tangentialebene

$$f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\underline{0{,}9 + 0{,}2(x-0{,}2) + 0{,}3(y-0{,}3)}$$

b) $f(x,y) = x^2 \cdot \sin y - \cos(x+2y)$

$f_x = 2x \cdot \sin y - \sin(x+2y)$

$f_y = x^2 \cdot \cos y - \sin(x+2y) \cdot 2$

$f_{xx} = 2 \cdot \sin y - \cos(x+2y)$

$f_{xy} = 2 \cdot \cos y - \cos(x+2y) \cdot 2$

$f_{yy} = -x^2 \cdot \sin y - \cos(x+2y) \cdot 4$

Analysis 2 Übung

24)

a)

$$x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F_x = 3x^2 - 3y$

$F_y = 3y^2 - 3x$

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

b)

für $x = 1$ drei Werte

1. Lsg "vom Himmel fallen lassen"

$y = 0$

2. Lsg + 3. Lsg

Punkte: $(1,0)$, $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$

$y^3 - 3y : (y - 0) = y^2 - 3$

OR

$y = \sqrt{3}$ $y = -\sqrt{3}$

$$y'(1,0) = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$y'(1,\sqrt{3}) = -\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 - 1} = -\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$y'(1,-\sqrt{3}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

c)

Es gibt sogar 3 Punkte:

wenn x und y gegen 0 gehen $(0,0)$

wenn x und y gegen 1 gehen $(1,1)$

wenn x gegen 1 geht und y gegen (-1) geht $(1,-1)$

Analysis 2 Übung

27) $F(x,y) = f(g(x,y); h(x,y))$ nach y ableiten

$f(u,v) = u^2 + v^2$

$u = g(x,y) = \cos x + \sin y$

$v = h(x,y) = x + y + 1$

$F_u = 2u$ $\qquad g_y = \cos y$

$F_v = 2v$ $\qquad h_y = 1$

$F_y = 2 \cdot (\cos x + \sin y) \cdot \cos y + 2 \cdot (x + y + 1)$

$F_y(0,0) = 4$

Analysis 2 Übung

29)

$$q(x,y) = \overset{\overset{a_{11}}{\uparrow}}{4x^2} + \overset{\overset{2\cdot a_{12}}{\uparrow}}{2bxy} + \overset{\overset{a_{22}}{\uparrow}}{25y^2} \qquad b \in \mathbb{R}$$

in symmetrische Matrix umwandeln

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot (x \ y)$$

$\Rightarrow a_{11} = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix} \cdot (x \ y)$

$a_{12} = b$

$a_{22} = 25$

für welche b ist die Matrix positiv definit

wenn $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ a_{11} positiv und $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ positiv

$4 > 0$ ✓

$$\begin{vmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{vmatrix} = 100 - b^2 > 0$$

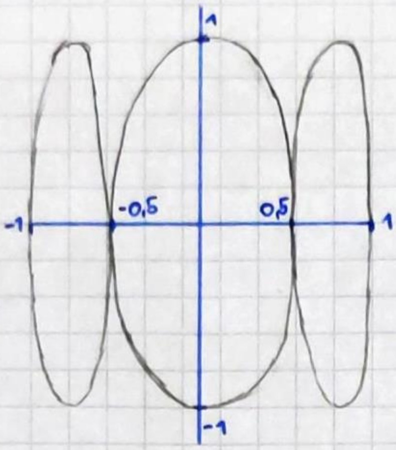
$$-b > 10$$

$$\underline{b < 10}$$

für $b < 10$ positiv definit

Analysis 2 Übung

110)



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\cos(3t)\cdot 3}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$\frac{9 \cdot \sin(3t) \cdot \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(3t)}{\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}$$

waagrechte Tangenten in

(0,1); (0,-1); (0.86, 1); (0.86, -1); (-0.86, 1); (-0.86, -1)

senkrechte Tangenten in

(1,0) (-1,0)

Wendepunkte

(0.5, 0), (-0.5, 0)