191)

$$y \cdot z := \left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{l=0}^{N-1} y_l\, z_{k-l}\right)_k \xrightarrow{DFT} (c_k\cdot d_k)_k$$

$$DFT: \quad c_k = \frac{1}{N}\cdot\sum_{r=0}^{N-1} y_r w^{-rk}$$

$$d_k = \frac{1}{N}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} z_m\cdot w^{-mk}$$

IDFT anwenden

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k\cdot d_k\cdot w^{kn}$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} y_r w^{-rk}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} z_m\cdot w^{-mk} \quad w^{kn}$$

$$h_n = \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} y_r\cdot z_m\cdot w^{-rk}\cdot w^{-mk}\cdot w^{nk}$$

$$h_n = \frac{1}{N^2}\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} y_r\cdot z_m\cdot\sum_{k=0}^{N-1} w^{-k(r+m-n)}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{-k(r+m-n)} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\cdot(-k\cdot(r+m-n))}$$

wenn $N \mid k$.
oder $N \mid r+m-n \Rightarrow r = q\cdot N - m + n$
dann $\Sigma = N$

sonst $q = (-k\cdot(r+m-n))$

$$\frac{1-e^{\frac{2\pi i}{N}\cdot N\cdot q}}{1-w} = 0$$

Σ darf nicht 0 sein da sonst keine periodische Faltung

$$h_n = \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y_r \cdot z_m \cdot N$$

$$h_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y_r \cdot z_m \qquad r = q \cdot N - m + n$$

$$h_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} y_{qN-m+n} \cdot z_m$$

wegen periodizität von $\vec{y}$ kann $q \cdot N$ weggelassen werden

$$h_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} y_{n-m} \cdot z_m \quad \checkmark$$

194) $y = 1,0,0,1,0,0 \ldots$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega^{-jk} \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

$$e^{2k\pi i} = 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{N}{3}-1} y_{3j}\, \omega^{-3kj}$$

$$e^{-k \frac{2\pi i}{N}} = 1 \iff N \mid k$$

$$\omega = e^{-3k \frac{2\pi i}{N}} \Rightarrow \text{für } k=0 \text{ trivial } \omega = 1$$

$$\text{für } k = \frac{N}{3} \quad e^{-2\pi i} = 1 = \omega$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{N}{3}-1} 1 = \frac{1}{3} \quad \text{für } k=0 \text{ oder } k = \frac{N}{3}$$

sonst

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{(\omega^{-3k})^{\frac{N}{3}} - 1}{(\omega^{-3k}) - 1} = \frac{\omega^{-kN} - 1}{N \cdot (\omega^{-3k} - 1)} = \frac{e^{-k2\pi i} - 1}{N \cdot (e^{-3k \frac{2\pi i}{N}} - 1)}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k=0 \quad k = \frac{N}{3} \\ 0 & \text{alles andere} \end{cases}$$

Aufgabe 19b)

$(0, 1, 2, 3)$

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$

even $(0, 2)$
odd $(1, 3)$

$U = (2, -2)$
$V = (4, -2)$

$(0, 2)$

$\omega = e^{\pi i} = -1$

evenarray $= 0$
oddarray $= 2$

$U = (0)$
$V = (2)$

return [0]

return [2]

for $j = 0$ bis $N-1 = 1$

$T = \omega^0 = 1$
$FFT[0] = 2$

$T = \omega^{-1} = -1$
$FFT[1] = -2$

return $[2; -2]$

for $j = 0$ bis $N-1 = 3$

$T = \omega^0 = 1$
$FFT[0] = 2+4 = 6$

$T = \omega^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$
$FFT[1] = -2+2i$

$T = \omega^{-2} = e^{-\pi i} = -1$
$FFT[2] = 2-4 = -2$

$T = \omega^{-3} = e^{-\frac{3}{2}\pi i} = i$
$FFT[3] = -2-2i$

return $[6; -2+2i; -2; -2-2i]$

$(1, +3)$

$\omega = e^{\pi i} = -1$

evenarray (1)
oddarray (3)

$U = (1)$
$V = (3)$

return [1]

return [3]

for $j = 0$ bis $N-1 = 1$

$T = \omega^0 = 1$
$FFT[0] = 1+3 = 4$

$T = \omega^{-1} = -1$
$FFT[1] = 1-3 = -2$

return $[4; -2]$

201)

a)

$$F\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} \cdot F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \quad f(ct) \quad dt$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_{c\cdot -a}^{c \cdot a} e^{-i\omega t} \quad f(u) \quad \frac{du}{c}$$

$u = ct \qquad t = \frac{u}{c}$

für $c < 0$ Grenzen vertauscht

daher $c = |c|$

$$\frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{c}u} \quad f(u) \quad du$$

$$\frac{1}{c} \cdot F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

b)

$$F\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \quad f(t-a) \quad dt$$

$u = t - a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \quad f(u) \quad du$$

$t = u + a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(u+a)} \quad f(u) \quad du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \cdot e^{-i\omega a} \quad f(u) \, du = e^{-i\omega a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \quad f(u) \, du$$

$$= e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

204)

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \, f(t)\, dt \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

für $\omega = 0$

$$\text{CHW} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} \, f(t)\, dt$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t} \, f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-i\omega t} \cdot t^2 \, dt \quad \to \text{Nebenrechnung}$$

$$= \frac{1}{e^{i\omega t}} \cdot \left(\frac{it^2}{\omega} + \frac{2t}{\omega^2} - \frac{2i}{\omega^3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{e^{i\omega}} \cdot \left(\frac{i}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2i}{\omega^3} \right) + \frac{2i}{\omega^3}$$

$$\cancel{\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{0} e^{-i\omega t} \, f(t)\, dt = 0}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{e^{i\omega}} \cdot \left(\frac{i}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2i}{\omega^3} \right) + \frac{2i}{\omega^3} & \text{sonst} \\ \frac{1}{3} & \text{für } \lim_{\omega \to 0} \end{cases}$$

Grenzwert existiert für alle ω da dieses im Nenner steht und somit nicht ∞ erreichen kann

Nebenrechnung 20 4)

$$\int e^{-i\omega t} \cdot t^2 \quad dt$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ f' & u \end{matrix}$$

$$\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t^2 - \frac{2i}{\omega} \int t \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t^2 - \frac{2i}{\omega} \cdot \left(\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t - \frac{i}{\omega} \int e^{-i\omega t} \right)$$

$$\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t^2 - \frac{2i}{\omega} \cdot \left(\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t + \frac{1}{\omega^2} \int \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$\cancel{\frac{i t e^{-i\omega t}}{\omega}}$$

$$\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t^2 - \frac{2i}{\omega} \cdot \left(\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} t + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$\frac{i}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} \cdot t^2 - \left(+ \frac{2ie^{-i\omega t}}{\omega^3} - \frac{2e^{-i\omega t} t}{\omega^2} \right)$$

$$\frac{ie^{-i\omega t} t^2}{\omega} + \frac{2e^{-i\omega t} t}{\omega^2} - \frac{2ie^{-i\omega t}}{\omega^3}$$

$$\frac{\frac{it^2}{e^{i\omega t}}}{\frac{\omega}{1}} + \frac{\frac{2t}{e^{i\omega t}}}{\frac{\omega^2}{1}} - \frac{\frac{2i}{e^{i\omega t}}}{\frac{\omega^3}{1}}$$

$$\frac{it^2}{e^{i\omega t} \omega} + \frac{2t}{e^{i\omega t} \omega^2} - \frac{2i}{e^{i\omega t} \omega^3}$$

$$\frac{1}{e^{i\omega t}} \cdot \left(\frac{it^2}{\omega} + \frac{2t}{\omega^2} - \frac{2i}{\omega^3} \right)$$

211)
2014)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} \quad x(\tau) \; d\tau = \frac{1}{1+t^2}$$

Anwendung d. Faltungsregel

$$\left(e^{-|t|} * x\right)(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

↳ Siehe Buch

$$\frac{2}{1+\omega^2} \cdot X(\omega) = F\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\}$$

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{\frac{2}{1+\omega^2}} \qquad \Big| \text{ IFT}$$

$$x(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \quad F(\omega) \cdot (1+\omega^2)$$

(Differentiation im Zeitbe[reich]

$$x(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \underbrace{F(\omega)}_{F\{f(t)\}} \, d\omega + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \overbrace{F(\omega) \cdot \omega^2}^{= F\{f''(t)\}} \, d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot F(\omega) \, d\omega + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot F\{f''(t)\} \, d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(t) + f''(t)\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$f' = \frac{1}{1+t^2} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{Umkehrfktregel}$$

$$f'' = -2 \cdot \frac{(1+t^2)^2 - 2 \cdot (1+t^2) \cdot 2t \cdot t}{(1+t^2)^4} = -2 \cdot \frac{(1+t^2)^2 - 4t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4}$$

$$= -2 \cdot \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^4} - -2 \cdot \frac{4t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = \frac{-2}{(1+t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1+t^2)^3}$$