Analysis 2 Übungsblatt 5 [redacted]

155

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t} \, dt$$

$$c_{k-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-i(k-n)\omega t}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{(n-k)i\omega t}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{ni\omega t} \cdot e^{-ki\omega t}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega t} \cdot f(t) \cdot e^{-ik\omega t}$$

Analysis 2 Übungsblatt 5 [redacted]

172)

$$f(t) = \frac{t^2}{\pi^2} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \cos(nt)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^3} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cdot \cos(nt)\, dt$$

partielle Integration

$$a_n = \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{t^2 \cdot \sin(nt)}{n} + \frac{2t \cdot \cos(nt)}{n^2} - \frac{2\sin(nt)}{n^3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot \sin(n\pi)}{n} - \frac{(-\pi)^2 \cdot \sin(n \cdot -\pi)}{n} + \frac{2\pi \cdot \cos(n\pi) + 2\pi \cos(n-\pi)}{n^2} + \frac{-2\sin(\pi n) + 2\sin(-\pi n)}{n^3}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^3} \cdot \left(0 + \frac{2\pi \cdot (\cos(n\pi) + \cos(n-\pi))}{n^2} + 0\right)$$

$$a_n = \frac{2\pi \cdot (2\cos(n\pi))}{\pi^3 n^2}$$

$$a_n = \frac{4\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} = \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \cos(0 \cdot t)\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi^3} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi^3} \cdot \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3\pi^3} - \frac{(-\pi)^3}{3\pi^3} = \frac{2}{3}$$

Analysis 2 Übungsblatt 5 [redacted]

172 Fortsetzung

$$\frac{t^2}{\pi^2} = \frac{1}{3} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot \cos(nt)$$

$t = \pi$

$$\frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{1}{3} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot \cos(n\pi) \qquad \Big| \cdot \pi^2$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{t^2}{\pi^2} = \frac{1}{3} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot \cos(nt)$$

$t = 0$

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(0)$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Analysis 2 Übungsblatt 5 [redacted]

181)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{1+x^2}} \qquad x \in R$$

für $x = 0$ maximal

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq M_k$$

ja, da $\frac{1}{n^2}$ bekanntermaßen konvergiert

$\Rightarrow$ M-Test bestanden $\rightarrow$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergent

Analysis 2 Übungsblatt 5 [redacted]

185) $\pi \cos(at) \rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int \pi \cdot \cos(at) \cdot \cos(nt)\, dt$$

$$a_n = \int \cos(at) \cdot \cos(nt)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \int \cos(nt+at) + \cos(nt-at)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \int \cos(nt+at) + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(nt-at)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+a} \cdot \sin(nt+at) + \frac{1}{n-a} \cdot \sin(nt-at) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(nt+at) \cdot (n-a) + \sin(nt-at) \cdot (n+a)}{n^2-a^2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot (\sin((n+a)t) + \sin((n-a)t)) - a \cdot (\sin((n+a)t) - \sin((n-a) \cdot t))}{n^2-a^2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot (2 \cdot \sin(nt) \cdot \cos(at)) - a \cdot (2 \cdot (\sin(at)) \cdot \cos(nt))}{n^2-a^2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot (2 \cdot \sin(n \cdot 2\pi) \cdot \cos(a2\pi) - a \cdot (2 \cdot \sin(2a\pi) \cdot \cos(2n\pi))}{n^2-a^2} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a \cdot \sin(2a\pi)}{n^2-a^2} = \frac{-a \cdot \sin(2a\pi)}{n^2-a^2}$$

$$a_0 = \frac{\sin(2a\pi)}{a}$$

185) Fortsetzung

$$\pi \cdot \cos(at) = \frac{\frac{\sin(2a\pi)}{a}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot \sin(2a\pi)}{a^2 - n^2} \cdot \cos(nt)$$

$t = \pi$

$$\pi \cdot \cos(a\pi) = \frac{\frac{\sin(2a\pi)}{a}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot \sin(a\pi) \cdot \cos(a\pi) \cdot 2}{a^2 - n^2} \cdot (-1)^n$$

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{\frac{2}{a}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2} \cdot (-1)^n$$

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2} \cdot (-1)^n$$

Analysis Übungsblatt 5 [redacted]

186)

Errechnen der Koordinate der kten Spalte und lten Zeile ($k \neq l$, $l \neq 1$ gilt)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{kj} \cdot \overline{\omega^{lj}} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(k-l)j} \begin{cases} \frac{1-\omega^{(k-l)\cdot N}}{1-\omega^{(k-l)}} & \omega^{(k-l)} \neq 1 \\ N & \text{für } \omega^{(k-l)} = 1 \end{cases}$$

es gilt

$$\omega^p = e^{\frac{2\pi i p}{N}} = 1 \quad \text{wenn } N|p \text{ sonst } \neq 1$$

$$\omega^{(k-l)} = 0 \quad \text{wenn } k = l$$

$$\omega^{(k-l)\cdot N} = 1 \quad \text{da } N|N$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(k-l)j} \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

und das ist die Einheitsmatrix