306)

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \, dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right) \, dy = 0$$

$$\frac{d}{dy} \; x \sin\frac{y}{x} - y \cos\frac{y}{x} = x \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - \left(\cos\frac{y}{x} + \frac{y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right)$$

$$= \frac{y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \; x\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) \cdot - \frac{y}{x^2}}_{\text{Integrabilität nicht erfüllt}}$$

suche nach integrierendem Faktor M

Annahme: m(x) hängt von x ab

$$\frac{f_y - g_x}{g} = \frac{d}{dx} \ln(m(x))$$

$$\frac{\frac{y \cdot \sin\frac{y}{x}}{x} - \left(\cos\frac{y}{x} + y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\right)}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{d}{dx} \ln(m(x))$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(m(x))$$

$$-\ln|x| = \ln(m(x))$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{x} = m(x)}}$$

306)

Probe:

$$\frac{d}{dy}\ \frac{1}{x}\left(x\sin\left(\frac{y}{x}\right)-y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)=$$

$$=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot-\sin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\cdot\left(x\cos\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{y}{x}\right)=-\sin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot-\frac{y}{x^2}=\frac{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

Integrabilitätsbedingungen erfüllt

suche Stammfunktion

$$\int\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy=x\cdot\int\cos(u)\,du=x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+C(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)=\sin\frac{y}{x}+x\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot-\frac{y}{x^2}$$

$$=\sin\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x}\Rightarrow\quad C(x)=0$$

$$\underline{\underline{x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+C}}\quad\Rightarrow\quad x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)=C$$

implizit gegeben

307)

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{f(x,y)}\,dx + \underbrace{xy}_{g(x,y)}\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dy}(x^2+y^2) &= 2y \\ \frac{d}{dx}(xy) &= y \end{aligned}\right\}\ \text{Integrabilität nicht erfüllt}$$

$\Rightarrow$ suche nach integrierendem Faktor M

Annahme: M hängt von x ab

$$\frac{d}{dx}\ln m(x) = \frac{f_y - g_x}{g}$$

$$\frac{d}{dx}\ln m(x) = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\ln m(x) = \ln(x)$$

$$\underline{\underline{m(x) = x}} \quad \text{integrierende Faktor}$$

Probe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dy}\,x(x^2+y^2) &= 2xy \\ \frac{d}{dx}\,x(xy) &= 2xy \end{aligned}\right\}\ \text{Integrabilität erfüllt}$$

Finden de Stammfunktion von

$$m(x)\,f(x,y)\,dx + m(x)\,g(x,y)\,dy = 0$$

bzw

$$y' = -\frac{m(x)\,f(x,y)}{m(x)\,g(x,y)}$$

307)

integriere $\int M(x)\ f(x,y)\ dx$

$$\int x^3 + xy^2\ dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

differenzier $\frac{d}{dy}\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} = x^2y \Rightarrow C(y) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + D \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} = D$$

$$\frac{x^2}{2}y^2 = D - \frac{x^4}{4}$$

$$y^2 = \frac{2\left(D - \frac{x^4}{4}\right)}{x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2\left(D - \frac{x^4}{4}\right)}{x^2}}$$

Anfangsbedingung $\quad x = 1 \quad y = -1$

$$-1 = \pm\sqrt{\frac{2\cdot\left(D - \frac{1}{4}\right)}{1}} \quad \Big|\ ^2$$

$$1 = 2\left(D - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{5}{4} = 2D$$

$$D = \frac{5}{8} \quad \rightarrow \text{einsetzen} \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{\frac{5}{8}\cdot 2 - \frac{x^4}{2}}{x^2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\frac{5-2x^4}{4}}{x^2}}$$

$$\underline{y = \pm\sqrt{\frac{5-2x^4}{4x^2}}}$$

3.10)

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

$$y' + 2xy - 2x^3y^3 = 0$$

Differentialgleichung der Form $y' + a(x)\,y + b(x)\,y^\alpha = 0$

=> Bernoulli'sche Differentialgleichung

neue Variable : $z = y^{1-\alpha}$ $\quad \alpha = 3$

$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ $\quad y = z^{-\frac{1}{2}}$

einsetzen und umformen

$$\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' + 2x\,z^{-\frac{1}{2}} - 2x^3\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\cdot z^{-\frac{3}{2}}\cdot z' + 2x\,z^{-\frac{1}{2}} - 2x^3 z^{-\frac{3}{2}} = 0 \qquad \Big|\cdot -2$$

$$z^{-\frac{3}{2}}\cdot z' - 4x\,z^{-\frac{1}{2}} + 4x^3 z^{-\frac{3}{2}} = 0 \qquad \Big|: z^{-\frac{3}{2}}$$

$$z' - 4x\,z^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} + 4x^3 = 0$$

$$z' - 4xz + 4x^3 = 0$$

$$\underline{z' - 4xz = -4x^3}$$

lineare Diff. 1. Ordnung

Löse mit Trennung der Variablen / Variation der Konstanten

$$\left.\begin{aligned} z' - 4xz &= 0 \\ \ln(z) &= \int 4x\,dx + C_0 \\ \ln(z) &= 2x^2 + C_0 \\ z &= C e^{2x^2} \end{aligned}\right\}\text{homogene Lsg}$$

310)

Ansatz $C(x)\, e^{2x^2}$

$$C'(x)\, e^{2x^2} + \underline{C(x)\, e^{2x^2} \cdot 4x - 4x \cdot C(x)\, e^{2x^2}} = -4x^3$$

$$C'(x)\, e^{2x^2} = -4x^3$$

$$C(x) = \int -4x^3 \cdot e^{-2x^2}\, dx$$

Löse Integral $\int -4x^3 \cdot e^{-2x^2}\, dx$

$$\int -4x^3 \cdot e^{-2x^2}\, dx = -4 \int x^3 \cdot e^{-2x^2}\, dx \quad ||| \quad u = x^2 \quad \frac{du}{2x}$$

$$= -2 \int u \cdot e^{-2u}\, du$$

$$= -2 \left(\frac{-u \cdot e^{-2u}}{2} + \int \frac{e^{-2u}}{2}\, du \right) \quad ||| \quad y = -2u \quad \frac{dy}{-2}$$

$$= -2 \left(\frac{-u e^{-2u}}{2} - \frac{1}{4} \int e^{y}\, dy \right)$$

$$= -2 \left(\frac{-u e^{-2u}}{2} - \frac{e^{-2u}}{4} \right)$$

$$= -2 \left(-\frac{x^2 e^{-2x^2}}{2} - \frac{e^{-2x^2}}{4} \right)$$

$$z(x) = x^2 e^{-2x^2} + \frac{e^{-2x^2}}{2}$$

Rücksubstituiere $y = z^{-\frac{1}{2}}$

$$\underline{y = \pm \sqrt[-2]{x^2 e^{-2x^2} + \frac{e^{-2x^2}}{2}}}$$

3.13)

$x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0$ Löse mit Ansatz $y(x) = x^r$

$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$

$\frac{d^2}{dx^2} x^r = r(r-1) x^{r-2}$

einsetzen und umformen

$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} - 5x \cdot r x^{r-1} + 5x^r = 0$

$r(r-1)x^r - 5 \cdot r x^r + 5x^r = 0$

$x^r \underbrace{(r(r-1) - 5r + 5)}_{\text{charakteristisches Polynom}} = 0$

$\underline{r^2 - 6r + 5}$

$3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \Rightarrow r_1 = 1$

$r_2 = 5$

da homogene Diff. ist die Lsg

$\cancel{C_1 \cdot e + C_2 \cdot e^{5x}}$ $y(x) = C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^5$

318)

$$y' = \frac{y^2-4}{x}$$ löse mittels Trennung der Variablen

$$y' = \frac{1}{x} \cdot (y-4)$$

$$\frac{dy}{y^2-4} = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{y^2-4} \rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \rightarrow \frac{1}{(y-2)(y+2)}$$

$$A = \frac{1}{2+2} \qquad B = \frac{1}{-2-2} \Rightarrow \frac{A}{(y-2)} + \frac{B}{(y+2)} \Rightarrow \frac{1}{4(y-2)} - \frac{1}{4(y+2)}$$

$$\left(\frac{1}{4(y-2)} - \frac{1}{4(y+2)}\right) dy = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2}\, dy - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y+2}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = \ln|x| + C_0 \quad |e$$

$$\sqrt[4]{\frac{e^{\ln|y-2|}}{e^{\ln|y+2|}}} = xC$$

$$\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+2}} = xC$$

$$\frac{y-2}{y+2} = x^4 C$$

$$y-2 = x^4 C \cdot (y+2)$$

$$y-2 = x^4 C y + 2x^4 C$$

$$y - 2 - x^4 C y = 2x^4 C \quad |+2$$

$$y(1-x^4C) = 2x^4C+2$$

$$\underline{y = \frac{2x^4C+2}{1-x^4C}}$$