1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Scholz, Gernot Salzer, Robert Glowka

23. März 2015

Aufgabe 1 (0.3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Autos sind Fahrzeuge. Autos können nicht fliegen. Daher können Fahrzeuge nicht fliegen.

(b) Alle Primaten sind Säugetiere. Affen sind Primaten. Daher sind alle Affen Säugetiere.

(c) Siehe Cartoon rechts.[1] Von Nachahmung wird abgeraten.

Lösung

(a) Autos sind Fahrzeuge.
Autos können nicht fliegen.
―――――――――――――
Fahrzeuge können nicht fliegen.

Inferenzregel: Alle x sind y.
Alle x können nicht z.
―――――――――――――
Alle y können nicht z.

Diese Inferenzregel ist nicht gültig. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle x sind y.
Alle y können nicht z.
―――――――――――――
Alle x können nicht z.

Ein anderes Beispiel, dem dieselbe Inferenzregel zugrunde liegt:

[1] Family Guy, season 9, episode 8, „New Kidney in Town“

(Alle) Adler sind Vögel.
(Alle) Vögel können nicht lesen.
(Alle) Adler können nicht lesen.

(b) Alle Affen sind Primaten.
Alle Primaten sind Säugetiere.
Alle Affen sind Säugetiere.

Inferenzregel: Alle x sind y.
Alle y sind z.
Alle x sind z.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Alle BMWs sind Autos.
Alle Autos sind Fahrzeuge.
Alle BMWs sind Fahrzeuge.

(c) Kerosene is fuel.
Red Bull is fuel.
Kerosene is Red Bull.

Inferenzregel: x ist eine Art von z.
y ist eine Art von z.
x ist dasselbe wie y.

Diese Inferenzregel ist nicht gültig. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

x ist eine Art von z.
x ist dasselbe wie y.
y ist eine Art von z.

Ein anderes Beispiel, dem dieselbe Inferenzregel zugrunde liegt:

Erdäpfel sind eine Art von Gemüse.
Erdäpfel sind dasselbe wie Kartoffeln.
Kartoffeln sind eine Art von Gemüse.

Aufgabe 2 (0.4 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Es regnet oder es ist nass.

(b) Diese Pizza schmeckt sehr lecker.

(c) Du wirst nicht wachsen, wenn du nichts isst.

(d) Man läuft nicht mit dem Löffel im Mund.

(e) Entweder ich kaufe mir einen mp3-Player oder ein Handy (beides kann ich mir nicht leisten).

(f) Es ist kalt, es schneit, aber ich gehe trotzdem spazieren.

(g) Wenn ich mich beeile und der Bus pünktlich kommt, dann schaffe ich es noch rechtzeitig.

(h) Ich gehe nur ins Kino, wenn Max auch ins Kino geht.

Lösung

(a) *Es regnet oder es ist nass.*
A … Es regnet.
B … Es ist nass.
Struktur: A oder B.
Formel: $A \vee B$

(b) *Diese Pizza schmeckt sehr lecker.*
A … Diese Pizza schmeckt sehr lecker.
Struktur: A.
Formel: A

(c) *Du wirst nicht wachsen, wenn du nichts isst.*
A … Du wirst wachsen.
B … Du isst etwas.
Struktur: nicht A, wenn nicht B.
Formel: $\neg A \subset \neg B$

(d) *Man läuft nicht mit dem Löffel im Mund.*
A … Man läuft.
B … Man hat einen Löffel im Mund.
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B.
Oder: Entweder nicht A oder nicht B.
Oder: Wenn A dann nicht B.
Formel: $\neg(A \wedge B)$ *oder* $\neg A \vee \neg B$ *oder* $A \uparrow B$ *oder* $A \supset \neg B$

(e) *Entweder ich kaufe mir einen mp3-Player oder ein Handy (beides kann ich mir nicht leisten).*
A … Ich kaufe einen mp3-Player.
B … Ich kaufe ein Handy.
Struktur: Entweder A oder B (ausschließendes „oder“).
Formel: $A \not\equiv B$

(f) *Es ist kalt, es schneit, aber ich gehe trotzdem spazieren.*
A … Es ist kalt.
B … Es schneit.
C … Ich gehe spazieren.
Struktur: A und B und C.
Formel: $A \wedge B \wedge C$

(g) *Wenn ich mich beeile und der Bus pünktlich kommt, dann schaffe ich es noch rechtzeitig.*
A … Ich beeile mich.
B … Der Bus kommt pünktlich.
C … Ich schaffe es rechtzeitig.

Struktur: Wenn A und B, dann C.
Formel: $(A \wedge B) \supset C$

(h) *Ich gehe nur ins Kino, wenn Max auch ins Kino geht.*
A ... Ich gehe ins Kino.
B ... Max geht ins Kino.
Struktur: A nur dann, wenn B.
Formel: $A \supset B$

Aufgabe 3 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}\}$ nicht vollständig ist.

Anmerkung: Die Begründung, dass in jedem Ausdruck immer mindestens eine Variable vorkommen muss und es daher nicht möglich ist, nullstellige Funktionen (also Konstanten wie false) darzustellen, ist nicht ausreichend, da das nur ein Problem der gewählten Darstellung ist. Wenn Sie aber zeigen können, dass beispielsweise die einstellige konstante Funktion definiert durch $\mathsf{false}(x) = 0$ nicht darstellbar ist, ist das schlüssig.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge $\{\mathsf{and}, \mathsf{not}\}$ vollständig ist. Es reicht daher zu zeigen, dass diese beiden Funktionen durch die Funktionen in $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ darstellbar sind. Tatsächlich gilt $\mathsf{not}(x) = \mathsf{xor}(x, \mathsf{true})$, wie sich durch Auswertung der beiden Seiten in den zwei möglichen Wahrheitsbelegungen überprüfen lässt:

x	$\mathsf{not}(x)$		=	$\mathsf{xor}(x,\mathsf{true})$		
0	**1**	0	✓	**1**	0	1
1	**0**	1	✓	**0**	1	1

Weiters lässt sich and aus or und not und damit aus or, xor und true zusammensetzen:

$$\begin{aligned}\mathsf{and}(x, y) &= \mathsf{not}(\mathsf{or}(\mathsf{not}(x), \mathsf{not}(y))) \\ &= \mathsf{xor}(\mathsf{or}(\mathsf{xor}(x, \mathsf{true}), \mathsf{xor}(y, \mathsf{true})), \mathsf{true})\end{aligned}$$

x	y	$\mathsf{and}(x,y)$			=	$\mathsf{xor}(\mathsf{or}(\mathsf{xor}(x,\mathsf{true}),\mathsf{xor}(y,\mathsf{true})),\mathsf{true})$								
0	0	**0**	0	0	✓	**0**	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	**0**	0	1	✓	**0**	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	**0**	1	0	✓	**0**	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	**1**	1	1	✓	**1**	0	0	1	1	0	1	1	1

(b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch or und xor darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem wir vom einzigen Argument x ausgehend die beiden Funktionen anwenden. Wir stellen znächst fest, dass $\mathsf{or}(x,x) = x$ und $\mathsf{xor}(x,x) = \mathsf{false}(x)$ gilt. Beziehen wir $\mathsf{false}(x)$ mit ein, erhalten wir weiters $\mathsf{or}(\mathsf{false}(x),x) = \mathsf{or}(x,\mathsf{false}(x)) = \mathsf{xor}(\mathsf{false}(x),x) = \mathsf{xor}(x,\mathsf{false}(x)) = x$ und $\mathsf{or}(\mathsf{false}(x),\mathsf{false}(x)) = \mathsf{xor}(\mathsf{false}(x),\mathsf{false}(x)) = \mathsf{false}(x)$. Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

Behauptung: Jeder Ausdruck bestehend aus or, xor und x ist äquivalent zu x oder $\mathsf{false}(x)$.

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl n der Anwendungen der Funktionen or bzw. xor.

Induktionsanfang $n = 0$: Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von or und xor ist x selber. Dafür gilt unsere Behauptung.

Induktionshypothese: Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit n oder weniger Anwendungen von or bzw. xor.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit $n+1$ Anwendungen von or bzw. xor gilt. Wir haben also einen Ausdruck $\mathsf{or}(f(x), g(x))$ bzw. $\mathsf{xor}(f(x), g(x))$ vor uns, bei dem sowohl f als auch g mit n oder weniger Anwendungen von or bzw. xor definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu x bzw. $\mathsf{false}(x)$. Wie wir oben aber festgestellt haben, sind die Funktionen or und xor mit den Argumenten x bzw. $\mathsf{false}(x)$ wieder äquivalent zu den Funktionen x bzw. $\mathsf{false}(x)$.

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu x (identische Abbildung) bzw. $\mathsf{false}(x)$ sind, ist z.B. die einstellige Funktion not nicht darstellbar. Die Menge $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}\}$ ist daher nicht funktional vollständig.

Aufgabe 4 (0.3 Punkte)

Im Bestseller *Gödel, Escher, Bach*[2] wird zur Illustration von formalen Systemen die Menge MIU eingeführt, die auch als Beispiel für induktive Definitionen dienen kann.
Die Menge MIU ist die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften. (x, y sind dabei Platzhalter für beliebige, möglicherweise auch leere Zeichenketten.)

(m1) Die Zeichenkette `MI` liegt in MIU.

(m2) Wenn x `I` in MIU vorkommt, dann auch x `IU`.

(m3) Wenn `M` x in MIU vorkommt, dann auch `M` $x\,x$.

(m4) Wenn x `III` y in MIU vorkommt, dann auch x `U` y.

[2] Douglas R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach – an Eternal Golden Braid. Basic Books, 1979. Seit damals in vielen Sprachen und Neuauflagen erschienen. Lesenswert.

(m5) Wenn $x\,\mathtt{UU}\,y$ in MIU vorkommt, dann auch $x\,y$.

(a) Die Wirkung der Regel (m2) kann beschrieben werden durch „Endet ein MIU-Wort mit `I`, erhält man durch Anhängen von `U` ein weiteres MIU-Wort." Beschreiben Sie in ähnlicher Weise die Regeln (m3), (m4) und (m5).

(b) Geben Sie die Mengen MIU_0, MIU_1, MIU_2, MIU_3 der stufenweise Konstruktion von MIU an. (MIU_i enthält alle Zeichenketten, die mit maximal i Anwendungen der Regeln (m2) bis (m5) gebildet werden können.)

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `MIII` nicht in der Menge MIU liegen kann.

Hinweis: Kann die Anzahl der `I`s in Wörtern der Menge MIU ein Vielfaches von drei sein?

Lösung

(a) Regel (m3): „Beginnt ein MIU-Wort mit `M`, erhält man durch Anhängen des Restes (= Wort ohne `M`) ein weiteres MIU-Wort."

Regel (m4): „Ersetzt man in einem MIU-Wort drei aufeinander folgende `I`s durch ein `U`, erhält man wieder ein MIU-Wort."

Regel (m5): „Streicht man in einem MIU-Wort zwei aufeinander folgende `U`s, erhält man ein weiteres MIU-Wort."

(b) $\mathrm{MIU}_0 = \{\mathtt{MI}\}$
$\mathrm{MIU}_1 = \mathrm{MIU}_0 \cup \{\mathtt{MIU}, \mathtt{MII}\}$
$\mathrm{MIU}_2 = \mathrm{MIU}_1 \cup \{\mathtt{MIIU}, \mathtt{MIUIU}, \mathtt{MIIII}\}$
$\mathrm{MIU}_3 = \mathrm{MIU}_2 \cup \{\mathtt{MIIIIU}, \mathtt{MIIUIIU}, \mathtt{MIUIUIUIU}, \mathtt{MIIIIIIII}, \mathtt{MUI}, \mathtt{MIU}\}$

(c) Wir zeigen, dass die Anzahl der `I`s in einem MIU-Wort nie ein Vielfaches von 3 sein kann.

Induktionsanfang: Die Anzahl der `I`s in jedem Wort aus MIU_0 ist nicht durch 3 teilbar. Diese Aussage ist offenbar richtig, da MIU_0 nur das Wort `MI` enthält und 1 nicht durch 3 teilbar ist.

Induktionshypothese: Die Anzahl der `I`s in jedem Wort aus MIU_n ist nicht durch 3 teilbar.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass auch die Wörter in MIU_{n+1} die Eigenschaft besitzen, dass die Anzahl der `I`s nicht durch 3 teilbar ist. MIU_{n+1} enthält die Wörter aus MIU_n sowie alle Wörter, die sich mit Hife der Regeln (m2) bis (m5) daraus bilden lassen.

Laut Induktionshypothese besitzen die Wörter in MIU_n die gewünschte Eigenschaft.

Die mit Hilfe der Regeln (m2) und (m5) daraus erzeugten Wörter besitzen ebenfalls die Eigenschaft, da das Hinzufügen oder Entfernen von `U`s nichts an der Anzahl der `I`s ändert.

Die Regel (m3) verdoppelt die Anzahl der `I`s, da sie aus dem Wort $\mathtt{M}x$ das Wort $\mathtt{M}xx$ macht. $\mathtt{M}x$ stammt aus der Menge MIU_n, die Anzahl der `I`s darin hat also den Rest 1 bzw. 2 bei Division durch 3. Die Verdopplung bewirkt, dass die Anzahl der `I`s in $\mathtt{M}xx$ den Divisionsrest 2 bzw. 1 besitzt, also nicht durch 3 teilbar ist.

Die Regel (m4) schließlich entfernt drei `I`s aus den Wörtern in MIU_n, wodurch die 3-Teilbarkeit nicht beeinflusst wird.

Somit hat auch MIU_{n+1} die Eigenschaft, dass die Anzahl der `I`s in seinen Wörtern nicht durch 3 teilbar ist.

Da MIU die Vereinigung der Mengen MIU_n für alle n ist, gilt für alle Wörter in MIU, dass die Anzahl der `I`s nicht durch 3 teilbar ist. Somit kann das Wort `MIII` nicht in MIU liegen, da es drei `I`s enthält.

Aufgabe 5 **(0.3 Punkte)**

Sei F die Formel $(((A \not\equiv B) \subset C) \wedge (B \equiv \neg C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$\mathcal{V} = \{A, B, C, \ldots, A_0, A_1, \ldots\}$ (aussagenlogische Variablen)

Wir zeigen, dass $(((A \not\equiv B) \subset C) \wedge (B \equiv \neg C))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

- Die Variablen `A`, `B` und `C` sind Formeln (a1).
- Da `A` und `B` Formeln sind, ist auch $(A \not\equiv B)$ eine Formel (a4).
- Da $(A \not\equiv B)$ sowie `C` Formeln sind, ist auch $((A \not\equiv B) \subset C)$ eine Formel (a4).
- $\neg C$ ist eine Formel, da `C` eine Formel ist (a3).
- Da `B` und $\neg C$ Formeln sind, ist auch $(B \equiv \neg C)$ eine Formel (a4).

- Da $((A \not\equiv B) \subset C)$ sowie $(B \equiv \neg C)$ Formeln sind, ist auch $(((A \not\equiv B) \subset C) \wedge (B \equiv \neg C))$ eine Formel.

(b) $$\begin{aligned}
\mathsf{val}_I(((A \not\equiv B) \subset C) \wedge (B \equiv \neg C)) &= \mathsf{val}_I((A \not\equiv B) \subset C) \;\mathsf{and}\; \mathsf{val}_I(B \equiv \neg C) \\
&= (\mathsf{val}_I((A \not\equiv B) \;\mathsf{if}\; \mathsf{val}_I(C)) \;\mathsf{and}\; (\mathsf{val}_I(B) \;\mathsf{iff}\; \mathsf{val}_I(\neg C)) \\
&= ((\mathsf{val}_I(A) \;\mathsf{xor}\; \mathsf{val}_I(B)) \;\mathsf{if}\; 1) \;\mathsf{and}\; (1 \;\mathsf{iff}\; \mathsf{not}\, \mathsf{val}_I(C)) \\
&= ((0 \;\mathsf{xor}\; 1) \;\mathsf{if}\; 1) \;\mathsf{and}\; (1 \;\mathsf{iff}\; \mathsf{not}\, 1) \\
&= (1 \;\mathsf{if}\; 1) \;\mathsf{and}\; (1 \;\mathsf{iff}\; 0) \\
&= 1 \;\mathsf{and}\; 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Die Formel F ist erfüllbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie wahr ist, etwa $I(A) = I(B) = 1, I(C) = 0$. Sie ist auch widerlegbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie falsch ist, etwa $I(A) = I(B) = I(C) = 1$. Diese Interpretationen lassen sich systematisch mittels der Wahrheitstafel finden:

A	B	C	$((A \not\equiv B)$	$\subset C)$	$\wedge$	$(B \equiv$	$\neg C)$
1	1	1	0	0	**0**	0	0
1	1	0	0	1	**1**	1	1
1	0	1	1	1	**1**	1	0
1	0	0	1	1	**0**	0	1
0	1	1	1	1	**0**	0	0
0	1	0	1	1	**1**	1	1
0	0	1	0	0	**0**	1	0
0	0	0	0	1	**0**	0	1

Aufgabe 6 (0.3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $((A \supset (B \not\equiv C)) \supset A)$ und $(A \not\equiv ((\neg B \vee \neg C) \wedge (B \wedge C)))$ äquivalent sind.

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$(A \supset (B \not\equiv C)) \supset A$			$=$	$A \not\equiv ((\neg\, B \vee \neg\, C) \wedge (B \wedge C))$			
0	0	0	1	0	**0**	✓	**0**	1	0	0
0	0	1	1	1	**0**	✓	**0**	1	0	0
0	1	0	1	1	**0**	✓	**0**	1	0	0
0	1	1	1	0	**0**	✓	**0**	0	0	1
1	0	0	0	0	**1**	✓	**1**	1	0	0
1	0	1	1	1	**1**	✓	**1**	1	0	0
1	1	0	1	1	**1**	✓	**1**	1	0	0
1	1	1	0	0	**1**	✓	**1**	0	0	1

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

(b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir dabei identische Formeln erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$\begin{aligned}
(A \supset (B \not\equiv C)) \supset A &= \neg(\neg A \vee (B \not\equiv C)) \vee A && \text{Ersetzen von } \supset \text{ durch } \neg, \vee \\
&= (A \wedge \neg(B \not\equiv C)) \vee A && \text{De Morgan} \\
&= A && \text{Absorption}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \not\equiv ((\neg B \vee \neg C) \wedge (B \wedge C)) &= A \not\equiv (\neg(B \wedge C) \wedge (B \wedge C)) && \text{De Morgan} \\
&= A \not\equiv \bot && \text{Komplement } (A \wedge \neg A = \bot) \\
&= A
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 **(0.3 Punkte)**

Ist die Formel A eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \subset C$, $C \downarrow B$ und $A \not\equiv (B \vee C)$? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit anzeigt, dass die Konsequenzbeziehnug gilt/nicht gilt?

Lösung

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \subset C,$	$C \downarrow B,$	$A \not\equiv (B \vee C)$	$\models_I$	A
0	0	0	1	1	0	✓	0
0	0	1	0	0	1	✓	0
0	1	0	1	0	1	✓	0
0	1	1	0	0	1	✓	0
1	0	0	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	0	0	✓	1
1	1	0	1	0	0	✓	1
1	1	1	1	0	0	✓	1

Die Formel A ist somit eine logische Konsequenz der Prämissen.

Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt. Wertet man in diesem Beispiel die Formeln von links nach rechts aus, ergibt sich folgende vereinfachte Tabelle:

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \subset C,$	$C \downarrow B,$	$A \not\equiv (B \vee C)$	$\models_I$	A
0	0	0	1	1	0	✓	
0	0	1	0			✓	
0	1	0	1	0		✓	
0	1	1	0			✓	
1	0	0	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	0		✓	
1	1	0	1	0		✓	
1	1	1	1	0		✓	

Formel zur Konsequenzbeziehung: A ist genau dann eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \subset C$, $C \downarrow B$ und $A \not\equiv (B \vee C)$, wenn die Formel

$$((A \subset C) \wedge (C \downarrow B) \wedge (A \not\equiv (B \vee C))) \supset A$$

gültig ist.

Aufgabe 8 (0.2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3)$

Aufgabe 9 (0.2 Punkte)

Sei F die Formel $(A \supset (B \downarrow C)) \vee (C \not\equiv (B \uparrow A))$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) KNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$(A \supset$	$(B \downarrow C))$	$\vee$	$(C \not\equiv$	$(B \uparrow A))$
0	0	0	1	1	**1**	1	1
0	0	1	1	0	**1**	0	1
0	1	0	1	0	**1**	1	1
0	1	1	1	0	**1**	0	1
1	0	0	1	1	**1**	1	1
1	0	1	0	0	**0**	0	1
1	1	0	0	0	**0**	0	0
1	1	1	0	0	**1**	1	0

Aus dieser Tafel lässt sich folgende KNF ablesen:

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

(b) DNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned}
&(A \supset (B \downarrow C)) \vee (C \not\equiv (B \uparrow A)) \\
&= (\neg A \vee \neg(B \vee C)) \vee (C \wedge \neg\neg(B \wedge A)) \vee (\neg C \wedge \neg(B \wedge A)) \\
&= (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C)) \vee (C \wedge B \wedge A) \vee (\neg C \wedge (\neg B \vee \neg A)) \\
&= (\neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg C \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg A) \\
&= (\neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg C \wedge \neg A) \\
&= (\neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \\
&= (\neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (0.4 Punkte)

Professor John Frink organisiert eine internationale Konferenz und sucht zur Unterstützung Student Volunteers. Nach zahlreichen Vorstellungsgesprächen schränkt er die Auswahl auf Bart, Janey, Lisa, Milhouse und Richard ein, wobei allerdings nur Lisa und Richard auch Fremdsprachen beherrschen. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Janey möchte ich auf jeden Fall, sie hat bei der letzten Konferenz schon erfolgreich mitgearbeitet.
- Ich kann höchstens drei Volunteers anstellen.
- Ich brauche jedenfalls mindestens einen Volunteer, der Fremdsprachen spricht.
- Richard und Milhouse kennen die Räume, in denen die Konferenz stattfinden soll. Einen der beiden sollte ich auf jeden Fall nehmen, aber beide zu nehmen ist nicht notwendig.
- Richard will nur mitmachen, wenn ich auch Bart anstelle.
- Milhouse und Lisa wollen nur gemeinsam genommen werden, da sie andernfalls zusammen auf Urlaub fahren wollen.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Wen stellt Professor Frink als Student Volunteer an? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

B ... Prof. Frink stellt Bart an.
J ... Prof. Frink stellt Janey an.
L ... Prof. Frink stellt Lisa an.
M ... Prof. Frink stellt Milhouse an.
R ... Prof. Frink stellt Richard an.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := J$ Janey auf jeden Fall

$F_1 := \neg(B \wedge L \wedge M) \wedge \neg(B \wedge L \wedge R) \wedge \neg(B \wedge M \wedge R) \wedge \neg(L \wedge M \wedge R)$
höchstens zwei weitere Volunteers neben Janey

oder

$F_1 := \neg(B \wedge J \wedge L \wedge M) \wedge \neg(B \wedge J \wedge L \wedge R) \wedge \neg(B \wedge J \wedge M \wedge R) \wedge \neg(B \wedge L \wedge M \wedge R) \wedge \neg(J \wedge L \wedge M \wedge R)$
höchstens drei Volunteers (nicht vier oder mehr)

$F_2 := R \vee L$ mind. einer der/die Englisch spricht
$F_3 := R \not\equiv M$ entweder Richard oder Milhouse
$F_4 := R \supset B$ Richard nur dann wenn Bart
$F_5 := M \equiv L$ Milhouse und Lisa nur gemeinsam

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen R, J, M, B und L, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_5$ wahr werden. Wegen der Formeln F_0 und F_1 genügt es jene Belegungen zu betrachten, in denen höchstens drei Variablen wahr sind, wovon eine J sein muss.

J	R	M	B	L	F_0	F_1	$R \vee L$	$R \not\equiv M$	$R \supset B$	$M \equiv L$	
1	0	0	0	0	1	1	0				
1	0	0	0	1	1	1	1	0			
1	0	0	1	0	1	1	0				
1	0	0	1	1	1	1	1	0			
1	0	1	0	0	1	1	0				
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
1	0	1	1	0	1	1	0				
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0		
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	✓
1	1	1	0	0	1	1	1	0			

Prof. Frink hat zwei Optionen: Er kann Janey, Milhouse und Lisa nehmen, oder Janey, Richard und Bart.

Aufgabe 11 (0.4 Punkte)

Der Stamm der Wakatuku wird von einer seltsamen Serie von Diebstählen heimgesucht. Der Häuptling vermutet, dass der verfeindete Nachbarstamm dafür verantwortlich ist und möchte ein paar seiner Krieger zum Spionieren in das Nachbardorf schicken. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Ich sollte mindestens zwei Krieger schicken, sonst ist das zu gefährlich.
- Flinker Fuchs und Alter Adler kann ich unmöglich gemeinsam schicken, die streiten nur wieder.
- Ich brauche mindestens einen Krieger, der gut kämpfen kann. Starker Stier, Alter Adler oder sogar beide?
- Listiger Luchs kann ich nur dann schicken, wenn ich auch Flinker Fuchs schicke.
- Wenn ich Starker Stier schicke, dann will Flinker Fuchs sicher nicht mitgehen.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Wen schickt der Häuptling der Wakatuku ins Nachbardorf? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

F ... Der Häuptling schickt Flinker Fuchs.
L ... Der Häuptling schickt Listiger Luchs.
S ... Der Häuptling schickt Starker Stier.
A ... Der Häuptling schickt Alter Adler.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (F \wedge L) \vee (F \wedge S) \vee (F \wedge A) \vee$	mind. 2 Krieger
$\quad (L \wedge S) \vee (L \wedge A) \vee (S \wedge A)$	
$F_1 := \neg(F \wedge A)$	Fuchs und Adler nicht gemeinsam
$F_2 := S \vee A$	Stier oder Adler
$F_3 := L \supset F$	Luchs nur wenn Fuchs
$F_4 := S \supset \neg F$	wenn Stier dann nicht Fuchs

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen F, L, S und A, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_4$ wahr werden. Wegen Formel F_0 genügt es jene Belegungen zu betrachten, in denen mindestens zwei Variablen wahr sind.

F	L	S	A	F_0	$\neg(F \wedge A)$	$S \vee A$	$L \supset F$	$S \supset \neg F$	
0	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
0	1	0	1	1	1	1	0	0	
0	1	1	0	1	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	0				
1	0	1	0	1	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0				
1	1	0	0	1	1	0			
1	1	0	1	1	0				
1	1	1	0	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	0				

Der Häuptling schickt Starker Stier und Alter Adler.

Aufgabe 12 (0.4 Punkte)

SAT-Solver sind Programme, die aussagenlogische Formeln auf Erfüllbarkeit testen. Typische SAT-Solver erhalten als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform und liefern die Antwort „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.
Beispiel: Für die konjunktive Normalform $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen $I_1(A) = I_1(B) = 1$ oder $I_2(A) = I_2(B) = 0$.

(a) Wie lässt sich eine Konsequenzbeziehung $F_1, \dots, F_n \models G$ mit Hilfe eines derartigen SAT-Solvers überprüfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) SAT-Solver liefern in der Regel nur eine einzige erfüllende Variablenbelegung. Die weiteren werden nicht ausgegeben, da das die verwendeten Verfahren nicht unterstützen. Was muss man tun, um diese dennoch mit Hilfe des SAT-Solvers berechnen zu können? Beschreiben Sie Ihre Methode und erläutern Sie sie an Hand des oben angeführten Beispiels. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Methode.

Hinweis: Überlegen Sie, wie die Eingabeformel abgeändert werden muss, um andere Variablenbelegungen als die bereits berechnete zu erhalten.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung:

- $F_1, \dots, F_n \models G$ gilt genau dann, wenn die Formel $(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \supset G$ gültig ist (Deduktionstheorem).

Die Frage nach der Gültigkeit einer Formel lässt sich durch Negieren der Formel in ein Erfüllbarkeitsproblem umwandeln.

- F ist gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Wir erhalten somit:

- $F_1, \dots, F_n \models G$ gilt genau dann, wenn die Formel $\neg((F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \supset G)$ unerfüllbar ist.

SAT-Solver benötigen als Eingabe Formeln in KNF. Da die negierte Implikation äquivalent zur Formel $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ ist, genügt es, jede der Formeln $F_1, \dots, F_n$ und $\neg G$ gesondert in konjunktive Normalformen umzuwandeln. In Summe erhalten wir folgendes Verfahren:

1. Wandle jede der Formeln $F_1, \dots, F_n$ und $\neg G$ in KNF um; das Ergebnis sei F_1', $\dots$, F_n' und G'.
2. Starte den SAT-Solver mit der Eingabe $F_1' \wedge \dots \wedge F_n' \wedge G'$. Lautet die Antwort „erfüllbar“, gilt die Konsequenzbeziehung $F_1, \dots, F_n \models G$ nicht. Lautet die Antwort hingegen „unerfüllbar“, dann gilt sie.

(b) Sei F eine erfüllbare Formel mit den Variablen $A_1, \dots, A_n$, und sei I die vom SAT-Solver berechnete erfüllende Variablenbelegung. Diese Variablenbelegung lässt sich durch eine Disjunktion D_I beschreiben, die für jede wahre Variable A (d.h. $I(A) = 1$) das Literal $\neg A$ und für jede falsche Variable A (d.h. $I(A) = 0$) das Literal A enthält:

$$D_I = \bigvee \{ \neg A_i \mid I(A_i) = 1 \} \vee \bigvee \{ A_i \mid I(A_i) = 0 \}$$

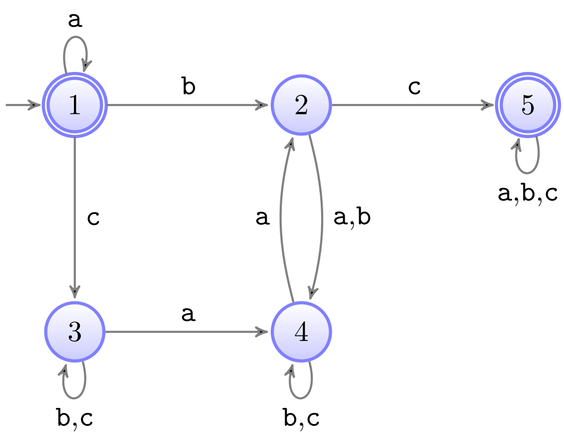
Die Disjunktion D_I hat die Eigenschaft, dass sie in der Interpretation I falsch ist und in allen anderen wahr.

Betrachten wir nun die Formel $F' = F \wedge D_I$. In allen Interpretationen, in denen D_I wahr ist, also in allen außer I, verhält sich F' wie F. In der Interpretation I hingegen liefert F' falsch, da D_I falsch ist. Um also eine weitere erfüllende Interpretation für F zu erhalten, können wir die Formel F' als Eingabe für den SAT-Solver verwenden. War I die letzte erfüllende Interpretation, ist F' unerfüllbar.

Für die Beispielformel $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ liefert ein SAT-Solver etwa die Variablenbelegung $I_1(A) = I_1(B) = 1$. Um diese Interpretation beim nächsten Durchlauf nicht mehr zu erhalten, bilden wir die Formel $F_1 = F \wedge D_{I_1}$, wobei D_{I_1} die Disjunktion $\neg A \vee \neg B$ ist. Für diese neue Formel liefert der SAT-Solver die Belegung $I_2(A) = I_2(B) = 0$. Wenn wir die Formel nochmals erweitern zu $F_2 = F_1 \wedge D_{I_2}$ mit $D_{I_2} = A \vee B$, erhalten wir eine unerfüllbare Formel; somit sind I_1 und I_2 die einzigen erfüllenden Interpretationen.

Aufgabe 13 (0.4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `aa`, `ac`, `abc`, `bbb`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{abbac})$.

(d) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert zum Beispiel ε, `a`, `bc`, `aabc` und `caac`.

(b) $\mathcal{A}$ akzeptiert ε, `aa` und `abc`, nicht aber `ac` und `bbb`.

(c)
$$\begin{aligned}
&\delta^*(1,\texttt{abbac}) = \delta^*(\delta(1,\texttt{a}),\texttt{bbac})\\
&= \delta^*(1,\texttt{bbac}) \;\; = \delta^*(\delta(1,\texttt{b}),\texttt{bac})\\
&= \delta^*(2,\texttt{bac}) \;\; = \delta^*(\delta(2,\texttt{b}),\texttt{ac})\\
&= \delta^*(4,\texttt{ac}) \;\; = \delta^*(\delta(4,\texttt{a}),\texttt{c})\\
&= \delta^*(2,\texttt{c}) \;\; = \delta^*(\delta(2,\texttt{c}),\varepsilon)\\
&= \delta^*(5,\varepsilon) \;\; = 5
\end{aligned}$$

(d) $\mathcal{A} = \langle\{1,2,3,4,5\}, \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{c}\}, \delta, 1, \{1,5\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

δ	a	b	c
1	1	2	3
2	4	4	5
3	4	3	3
4	2	4	4
5	5	5	5

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

Aufgabe 14 **(0.3 Punkte)**

Geben Sie einen endlichen Automaten an, der genau jene Numerale im Ternärsystem akzeptiert, die eine durch fünf teilbare Zahl darstellen.

Numerale im Ternärsystem bestehen aus den Zeichen `0`, `1` und `2`. Beispielsweise stellt das Ternärnumeral `2102` die Zahl

$$\texttt{2} \cdot 3^3 + \texttt{1} \cdot 3^2 + \texttt{0} \cdot 3^1 + \texttt{2} \cdot 3^0 = 54 + 9 + 0 + 2 = 65$$

dar. Da 65 durch 5 teilbar ist, soll der gesuchte Automat $\mathcal{A}$ die Zeichenkette `2102` akzeptieren. Einige Wörter, die in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ vorkommen:

$$\texttt{0}, \texttt{00}, \texttt{000}, \ldots, \texttt{12}, \texttt{012}, \texttt{0012}, \ldots, \texttt{101}, \texttt{120}, \texttt{202}, \texttt{221}, \ldots, \texttt{2102}, \ldots$$

Hinweis: Wenn Sie bereits den Wert eines Numerals kennen und eine weitere Ziffer anhängen, erhalten Sie den Wert des neuen Numerals, indem Sie den Wert des alten Numerals mit 3 multiplizieren und den Wert der weiteren Ziffer dazu addieren (Horner-Schema). Der Wert des Numerals `2102` kann also auch iterativ berechnet werden durch den Ausdruck $((\texttt{2} \cdot 3 + \texttt{1}) \cdot 3 + \texttt{0}) \cdot 3 + \texttt{2}$. Da wir nur an der 5-Teilbarkeit des Numerals und nicht an seinem Wert selbst interessiert sind, genügt es, während der Berechnung mit den Restklassen modulo 5 zu arbeiten. Etwa lässt sich die 5-Teilbarkeit der durch das

Ternärnumeral `2102` dargestellten Zahl folgendermaßen feststellen:

$$
\begin{aligned}
((\mathtt{2} \cdot 3 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} &= ((6 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&\equiv_5 ((1 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= (2 \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= (6 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&\equiv_5 (1 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= 1 \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= 5 \\
&\equiv_5 0
\end{aligned}
$$

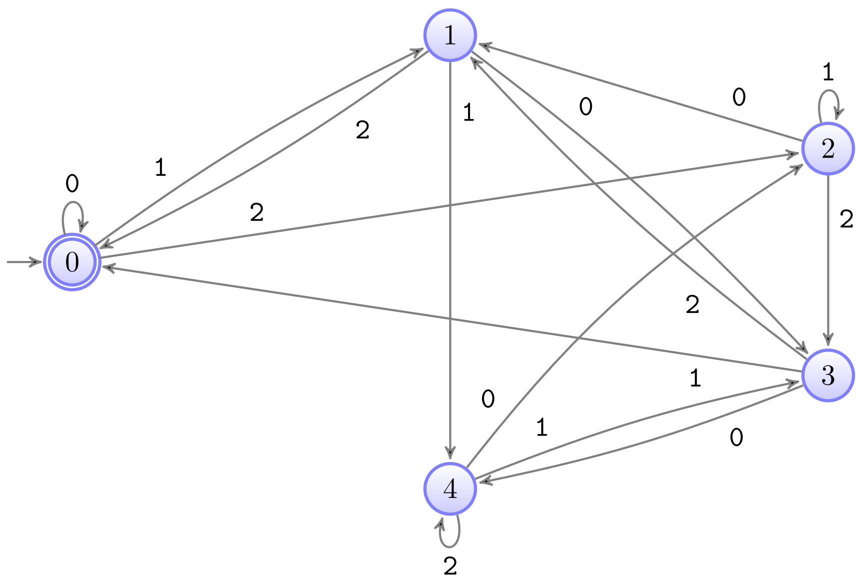
Die Restklasse 0 entspricht dem Rest 0 bei Division durch 5, daher ist die durch `2102` dargestellte Zahl durch 5 teilbar.

Lösung

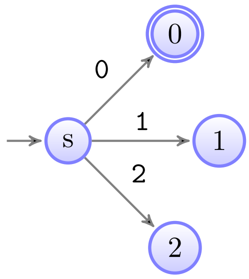
Festlegung der Zustände. Wir benötigen fünf Zustände $0, \ldots, 4$ für die fünf Restklassen modulo 5. Endzustand ist 0, der dem Divisionsrest 0 entspricht. Wird das Leerwort ε als Numeral mit dem Wert 0 betrachtet, können wir 0 auch als Startzustand verwenden. Andernfalls benötigen wir einen zusätzlichen Startzustand s.

Festlegung des Alphabets. Das Alphabet des Automaten besteht aus den Ziffern des Ternärsystems, also aus `0`, `1` und `2`.

Festlegung der Übergangsfunktion. Wir müssen für jeden Zustand und jedes Symbol des Alphabets den Folgezustand festlegen. Wenn wir ε als ternäres Numeral zulassen, erhalten wir die folgende graphische Darstellung des Automaten.



Soll ε nicht Teil der Sprache sein, benötigen wir einen separaten Startzustand, der nicht gleichzeitig Endzustand ist. Der obige Automat ist folgendermaßen zu erweitern.



Alternativ wird der Automat durch das Tupel $\langle\{s, 0, 1, 2, 3, 4\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}, \delta, s, \{0\}\rangle$ beschrieben, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle festgelegt wird.

δ	0	1	2
s	0	1	2
0	0	1	2
1	3	4	0
2	1	2	3
3	4	0	1
4	2	3	4

Aufgabe 15 **(0.4 Punkte)**

Die Attraktionen eines Indoorspielplatzes werden durch Einwurf sogenannter Tokens (Plastikmünzen) bezahlt, die zuvor bei einem Automaten gekauft werden. Der Automat akzeptiert Münzen im Wert von 5, 10 und 20 Cent. Immer wenn der eingeworfene Geldbetrag 25 Cent oder mehr beträgt, gibt der Automat ein Token aus. War das Guthaben höher als 25 Cent, wird der Restbetrag auf den Kauf des nächsten Token angerechnet; Geld wird keines zurückgegeben.

Modellieren Sie den Token-Automaten durch einen Mealy-Automaten, der bei jeder eingeworfenen Münze entscheidet, ob ein Token ausgegeben (`J`) oder nicht ausgegeben (`N`) werden soll. Der Einwurf der Münzen 5 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 5 Cent und 10 Cent führt beispielsweise zur Ausgabe `NNNJNJ`.

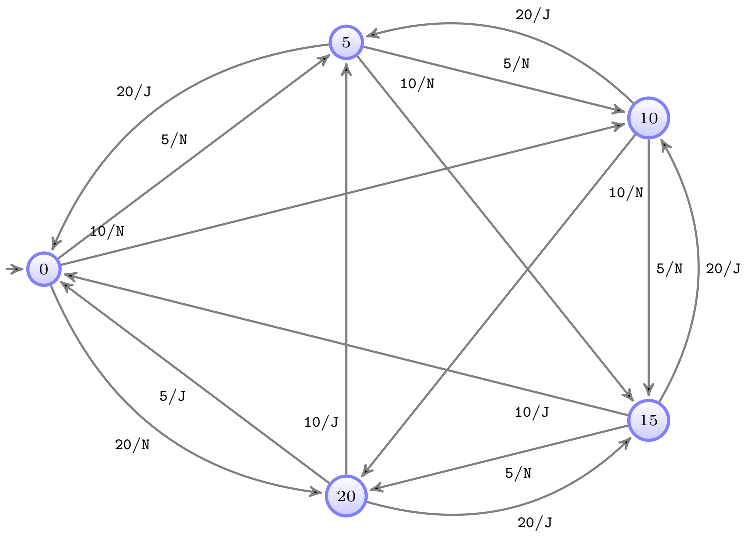
Lösung

Festlegung der Zustände. Das Verhalten des Automaten hängt von den bereits eingeworfenen Münzen ab. Er muss also in der Lage sein, sich das Guthaben zu merken. Dieses kann nicht mehr als 20 Cent betragen, da andernfalls das Guthaben durch Ausgabe eines Tokens automatisch reduziert wird. Aufgrund der möglichen Münzen kann das Guthaben nur ein Vielfaches von 5 Cent sein. Wir benötigen daher die Zustände 0, 5, 10, 15 und 20, die dem Guthaben 0 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 15 Cent und 20 Cent entsprechen.

Festlegung des Eingabealphabets. Wir benötigen drei Symbole, die den drei Münzarten entsprechen. Wir wählen dafür `5`, `10` und `20`.

Festlegung des Ausgabealphabets. Bei jeder eingeworfenen Münze soll der Automat signalisieren, ob ein Token auszugeben ist oder nicht. Entsprechend der Angabe wählen wir dafür die Symbole `J` und `N`.

Festlegung der Übergangs- und Ausgabefunktion. Wir müssen für jeden Zustand und jedes Symbol des Alphabets den Folgezustand sowie das ausgegebene Symbol festlegen. Die graphische Darstellung des Mealy-Automaten sieht folgendermaßen aus.



Alternativ wird der Mealy-Automat durch das Tupel

$$\langle \{0, 5, 10, 15, 20\},\ \{\texttt{5}, \texttt{10}, \texttt{20}\},\ \{\texttt{N}, \texttt{J}\},\ \delta,\ \gamma,\ 0\rangle$$

beschrieben, wobei die Übergangsfunktion δ und die Ausgabefunktion γ durch folgende Tabellen festgelegt werden.

δ	`5`	`10`	`20`
0	5	10	20
5	10	15	0
10	15	20	5
15	20	0	10
20	0	5	15

γ	`5`	`10`	`20`
0	`N`	`N`	`N`
5	`N`	`N`	`J`
10	`N`	`N`	`J`
15	`N`	`J`	`J`
20	`J`	`J`	`J`