12 Differenzengleichungen

12.1 Allgemeines

Im Kapitel Differentialgleichungen haben wir uns mit Gleichungen beschäftigt, die reelle Funktionen und deren Ableitungen enthalten konnten. Nun werden wir *diskretisierte Varianten* betrachten. Unsere Funktionen sind daher von der Form $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, also Folgen reeller Zahlen. Solche Funktionen werden oft verwendet, um zeitliche Entwicklungen einer Größe darzustellen. Häufig wird die Zeitachse *diskretisiert* und in Teilintervalle der Länge Δt unterteilt.

Wir setzen dann: $y(n) = f(n \cdot \Delta t)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Durch die Werte $y(0), y(1), y(2), \ldots$ wird der Verlauf der Funktion f annähernd beschrieben.

Statt des Differentialquotienten verwenden wir in diesem Fall entsprechende *Differenzenquotienten*

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f((n+1)\Delta t) - f(n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t}.$$

Da die Wahl der Zeiteinheit beliebig ist, setzen wir einfach $\Delta t = 1$. Es ergibt sich dann $t = n\Delta t = n$ und $y(n) = y(t) = f(t)$. Dann ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

Notation: Oft wird y_t statt $y(t)$ geschrieben und wir erhalten somit

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

Δy_t heißt *erste Differenz* von y_t an der Stelle t.

Analog zu höheren Ableitungen werden entsprechende Differenzen höherer Ordnung definiert:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 y_t &= y_t \\
\Delta^1 y_t &= y_{t+1} - y_t \\
\Delta^2 y_t &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \\
\Delta^k y_t &= \Delta(\Delta^{k-1} y_t) = \Delta^{k-1} y_{t+1} - \Delta^{k-1} y_t \quad (k \geq 1)
\end{aligned}$$

$\Delta^k y_t$ heißt *k-te Differenz* oder *Differenz der Ordnung k*.

Beispiel 12.1
Für $y_t = t^2$ sehen die ersten 3 Differenzen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1 \\
\Delta^2 y_t &= (2(t+1) + 1) - (2t + 1) = 2 \\
\Delta^3 y_t &= 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Definition 12.1
Eine *Differenzengleichung n-ter Ordnung* ist eine Gleichung, die $\Delta^n y_t$ und eventuell noch Differenzen $\Delta^l y_t$ niedrigerer Ordnung $l < n$ enthält. Sie hat die allgemeine Form

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^k y_t, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 12.2

$$\Delta y_t - \frac{1}{2} y_t = 0$$

Das ist eine Differenzengleichung 1. Ordnung. Diese können wir umformen zu

$$y_{t+1} - y_t - \frac{1}{2} y_t = 0 \qquad \text{oder} \qquad y_{t+1} - \frac{3}{2} y_t = 0 \qquad \text{oder} \qquad y_{t+1} = \frac{3}{2} y_t\,.$$

12.2 Differenzengleichungen erster Ordnung

12.2.1 Lösung per Iteration

Oft ist es möglich, Differenzengleichungen 1. Ordnung bei gegebenem Startwert y_0 zu lösen, indem einfach die $y_1, y_2, \ldots$ der Reihe nach berechnet werden und daraus das Bildungsgesetz der Folge (y_n) *erraten* wird. Der Beweis kann dann durch vollständige Induktion erfolgen.

Beispiel 12.3

$$\Delta y_t - \frac{1}{2} y_t = 0$$

Bereits umgeformt zu

$$y_{t+1} - \frac{3}{2} y_t = 0$$

Wir haben also

$$y_1 = \frac{3}{2} y_0 \qquad \text{und} \qquad y_2 = \frac{3}{2} y_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 y_0\,.$$

Daraus erraten wir das Gesetz

$$y_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t y_0\,.$$

12.2.2 Die homogene lineare Differenzengleichung

Die allgemeine Form einer homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung ist

$$y_{t+1} + a y_t = 0\,.$$

Ausgehend von den Erfahrungen des letzten Beispiels verwenden wir den Ansatz

$$y_t = A\beta^t \,.$$

Setzen wir dies in die Differenzengleichung ein, erhalten wir

$$A\beta^{t+1} + aA\beta^t = 0 \qquad \text{also} \qquad A\beta^t(\beta + a) = 0 \quad \text{und somit } \beta = -a \,.$$

Somit hat die allgemeine Lösung die Form $y_t = A(-a)^t$.

Wir können den Parameter A bestimmen, wenn ein Startwert y_0 gegeben ist. Es gilt dann $A = y_0$, denn

$$y_0 = A(-a)^0 = A \qquad \text{und somit} \qquad y_t = y_0 \cdot (-a)^t \,.$$

Ist $a > 0$, so oszilliert die Folge $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $|\,a\,| < 1$.

12.2.3 Die inhomogene lineare Differenzengleichung

Die allgemeine Form einer inhomogenen linearen Differenzengleichung ist:

$$y_{t+1} + ay_t = s, \;\; a, s \in \mathbb{R} \,.$$

Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen gilt ein Superpositionsprinzip, d.h. die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)} \,,$$

wobei wieder $y_t^{(h)}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung $y_{t+1} + ay_t = 0$ und $y_t^{(p)}$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist.

Nehmen wir zunächst an, dass $y_t^{(p)} = c$ (d.h. konstant) ist.

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$c + ac = s \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{s}{a+1}, \;\; a \neq -1 \,.$$

Für $a = -1$ versuchen wir den Ansatz $y_t^{(s)} = ct$

$$c(t+1) + a\,c\,t = s \Rightarrow ct + c - ct = s \Rightarrow c = s \qquad \text{also} \qquad y_t^{(s)} = st \,.$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differenzengleichung

$$y_t = \begin{cases} A(-a)^t + \frac{s}{a+1}, & \text{falls } a \neq -1 \,, \\ A + st & \text{falls } a = -1 \,. \end{cases}$$

Beispiel 12.4

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{t+1} - 2y_t = 2 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y_t &= A \cdot 2^t + \tfrac{2}{-2+1} = A \cdot 2^t - 2\,, \\ y_0 &= A \cdot 2^0 - 2 = A - 2\,, \\ A &= y_0 + 2 = 3\,. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir also $y_t = 3 \cdot 2^t - 2$.

12.3 Differenzengleichungen zweiter Ordnung

12.3.1 Die homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

Diese hat die allgemeine Form

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Genau wie im Fall der homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung versuchen wir den Lösungsansatz

$$y_t = A\beta^t\,.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$A\beta^{t+2} + a_1 A\beta^{t+1} + a_2 A\beta^t = 0$$

und somit

$$\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$$

Diese Gleichung heißt die *charakteristische Gleichung* der Differenzengleichung zweiter Ordnung. Wie im Fall der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung wird dies nach β aufgelöst und wir erhalten

$$\beta_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = 0\,.$$

Abhängig vom Vorzeichen des Ausdrucks unter der Wurzel erhalten wir zwei reelle, eine reelle oder zwei komplex konjugierte Lösungen.

1. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$: also $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ \beta_1 \neq \beta_2$.

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_t = A_1\beta_1^t + A_2\beta_2^t$$

Die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung zweiter Ordnung hat nun zwei Parameter A_1 und A_2. Um diese festzulegen braucht man daher auch zwei Anfangswerte für die Folge, also etwa y_0 und y_1.

Beispiel 12.5

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$\beta^2 - 3\beta + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2\,.$$

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_t = A_1 \cdot 1^t + A_2 \cdot 2^t\,.$$

Für die Anfangsbedingungen $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ erhalten wir

$$0 = A_1 + A_2 \qquad \text{und} \qquad 1 = A_1 + 2A_2$$

und daraus

$$A_1 = -1,\ A_2 = 1$$

Insgesamt also

$$y_t = -1 + 2^t\,.$$

2. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$: also $\beta_1 = \beta_2 = \frac{-a_1}{2} = \beta \in \mathbb{R}$.

Damit ist $A_1\beta^t$ sicher eine Lösung. Wir brauchen jetzt aber noch eine zweite Lösung. Durch Einsetzen in die Gleichung stellen wir fest, dass auch $A_2 t\beta^t$ eine Lösung ist. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y_t = A_1\beta^t + A_2 t\beta^t\,.$$

Beispiel 12.6

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist $\beta^2 - 4\beta + 4 = 0$ uns somit $\beta_1 = \beta_2 = 2$.
Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_t = A_1 \cdot 2^t + A_2 \cdot t \cdot 2^t\,.$$

3. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$: Setzen wir

$$b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad a = -\frac{a_1}{2} \in \mathbb{R}\,.$$

Dann erhalten wir

$$\beta_{1,2} = a \pm ib$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über

$$\begin{aligned} \beta_1 &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \\ \beta_2 &= r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi} \end{aligned}$$

mit

$$r = |\,\beta_1\,| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = \sqrt{a_2}$$

und

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \tfrac{b}{r} = \sqrt{1-\tfrac{a_1^2}{4a_2}}\\ \cos\varphi &= \tfrac{a}{r} = -\tfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung und nach einigen Umformungen erhalten wir

$$y_t = r^t(A_1\cos(\varphi t) + A_2\sin(\varphi t))\,.$$

Beispiel 12.7

$$y_{t+2} + y_{t+1} + y_t = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist $\beta^2 + \beta + 1 = 0$ mit Lösungen $\beta_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Übergang zu Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{1} = 1,\quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}$$

und daraus erhalten wir

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}\,,$$

und somit die allgemeine Lösung

$$y_t = A_1\cos(\frac{2\pi t}{3}) + A_2\sin(\frac{2\pi t}{3}))\,.$$

12.3.2 Die inhomogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

Die allgemeine Form dieser ist

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = s,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Wie bei den inhomogenen Differenzengleichungen erster Ordnung kann die allgemeine Lösung wieder zerlegt werden

$$y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}\,,$$

wobei wieder $y_t^{(h)}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$ und $y_t^{(p)}$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist.

Wir gehen zunächst wieder davon aus, dass $y_t^{(p)} = c$ konstant ist.

Einsetzen ergibt $c + a_1 c + a_2 c = s$, also $c = \frac{s}{1+a_1+a_2}$. Wieder funktioniert das aber nur, wenn $1 + a_1 + a_2 \neq 0$, d.h., $a_1 + a_2 \neq -1$.

Wenn also $a_1 + a_2 = -1$ ist, verwenden wir den Ansatz $y_t^{(p)} = ct$.

Durch Einsetzen in die Gleichung erhalten wir

$$c = \frac{s}{a_1 + 2} \, .$$

Das funktioniert natürlich nur dann wieder wenn $a_1 \neq -2$.

Ist nun $a_1 = -2$, setzen wir $y_t^{(p)} = ct^2$ an und erhalten mit $c = \frac{s}{2}$ eine Lösung.

Beispiel 12.8

$$y_{t+2} + y_{t+1} + y_t = 9 \, .$$

Als allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung hatten wir

$$y_t = A_1 \cos(\frac{2\pi t}{3}) + A_2 \sin(\frac{2\pi t}{3}) \; .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzengleichung erhalten wir mit

$$c = \frac{9}{1+1+1} = 3 \qquad \text{also} \qquad y_t^{(p)} = 3 \; .$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y_t = A_1 \cos(\frac{2\pi t}{3}) + A_2 \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 3 \, .$$

Beispiel 12.9

Sei $\Delta^2 y_t = 2$ gegeben. Zunächst formen wir dies um zu:

$$\Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \; .$$

Die zugehörige homogenen Differenzengleichung ist also

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$$

Als charakteristische Gleichung erhalten wir

$$\beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad \beta_1 = \beta_2 = 1 \; .$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y_t = A_1 \beta^t + A_2 t \beta^t \, .$$

Bei der Suche nach der Speziellen Lösung für die inhomogene Differenzengleichung stellen wir fest, dass

$$1 + a_1 + a_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_1 = -2 \, .$$

Daher setzen wir $c = \frac{s}{2} = \frac{2}{2} = 1$ und erhalten schließlich als allgemeine Lösung

$$y_t = A_1 + A_2 t + t^2 \, .$$