GMA

Grundlagen Mathematik und Analysis

Reelle Funktionen

Christian Cenker
Gabriele Uchida

Data Analytics and Computing

Stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Folgen, Limiten

Folge $\langle a_n \rangle: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$

$\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$

Konvergenz von Folgen

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ *konvergiert* gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n > N$. Die Folge heißt *konvergent*, a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}:\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N\,.$$

$\langle a_n \rangle \to a$ $\qquad$ ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$

Konvergenz von Funktionen

Sei $f: A \to B$ eine Funktion. Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Funktion f an der Stelle x_0, wenn für jede Argumentfolge $\langle x_n \rangle$, die gegen x_0 strebt ($\langle x_n \rangle \to x_0$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$) gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Wir schreiben dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall |x_0 - x| < \delta$$

Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Stetigkeit

Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in A$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

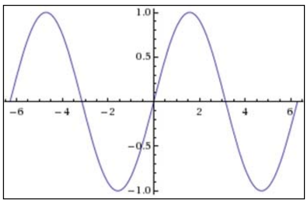
Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie in allen Punkten der Definitionsmenge A stetig ist, d. h.,

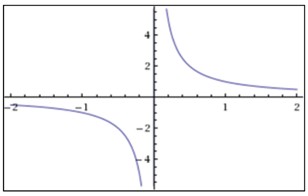
$$f : A \to B \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

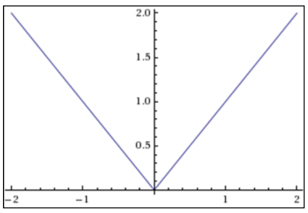
$$f : A \to B \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in A : \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta$$

Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiele



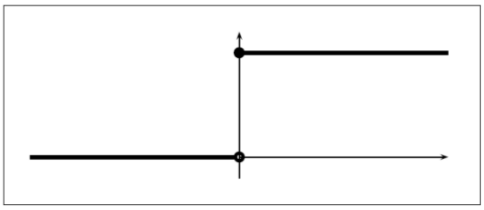




http://www.wolframalpha.com

Stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Heaviside-Funktion

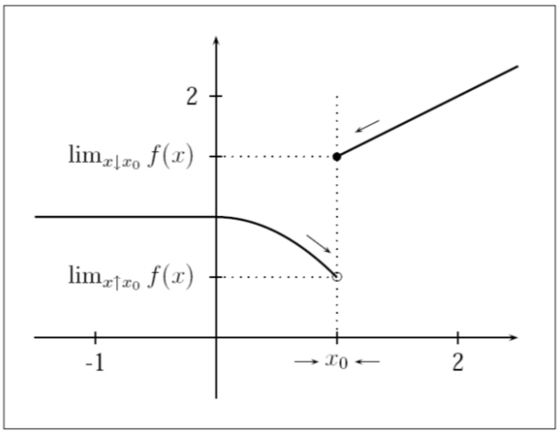


$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Unstetigkeitsstelle 0

Stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Links- und rechtsseitig stetig



Leydold: Mathematik für Ökonomen

Stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Links- und rechtsseitig stetig

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt in x_0 *rechtsseitig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta)\,.$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$$

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt in x_0 *linksseitig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

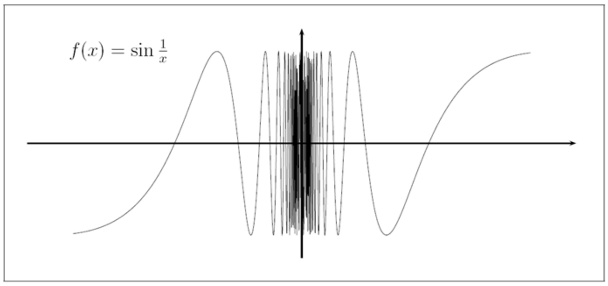
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0]\,.$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0]$$

Eine Funktion ist in x_0 genau dann stetig, wenn sie dort links- und rechtsseitig stetig ist, und daher dort auch die Funktionswerte (Limiten) übereinstimmen.

Stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

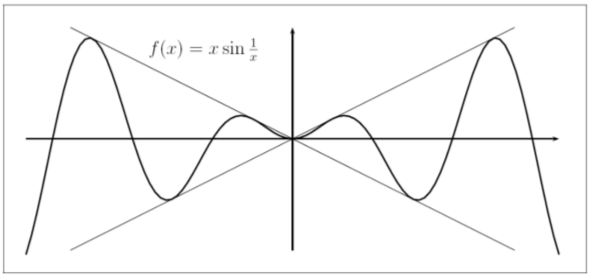
Links- und rechtsseitig stetig



Die Funktion $\sin\frac{1}{x}$ ist im Nullpunkt weder links- noch rechtsseitig stetig. Es kann nachgewiesen werden, dass sie in jeder noch so kleinen ε-Umgebung um 0 jeden beliebigen Wert zwischen (-1) und 1 annehmen kann.

Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

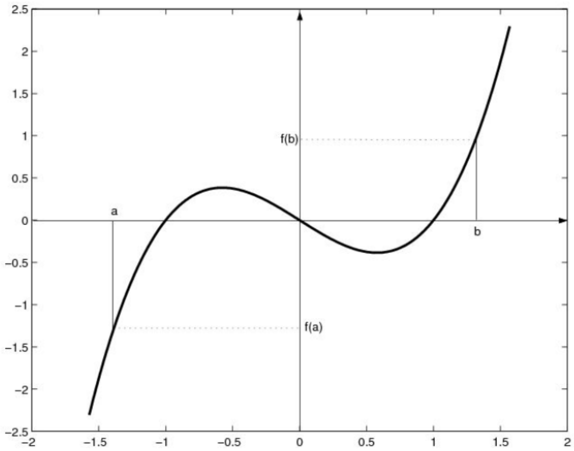
Links- und rechtsseitig stetig



Die Funktion $x \sin \frac{1}{x}$ hingegen ist im Nullpunkt stetig, da die Funktion x den betragsmäßig mit 1 beschränkten Sinus dominiert.

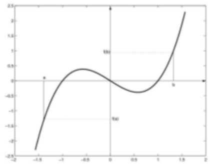
Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Mittelwertsätze



Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Mittelwertsätze



Mittelwertsatz für stetige Funktionen

Version 1

Ist $f\,:A \to B$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion so nimmt diese alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Version 2

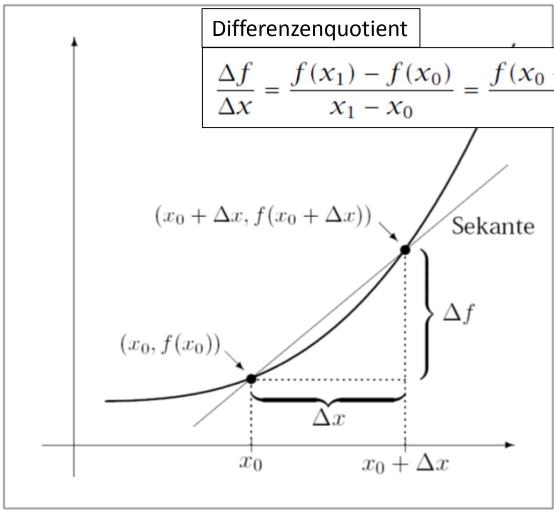
Ist $f\,:\,A \to B$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und gilt $f(a) < 0 < f(b)$ dann gibt es zumindest eine Nullstelle in $[a, b]$, das heißt, es gibt ein ξ mit $f(\xi) = 0,\ \ a < \xi < b$.

Differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

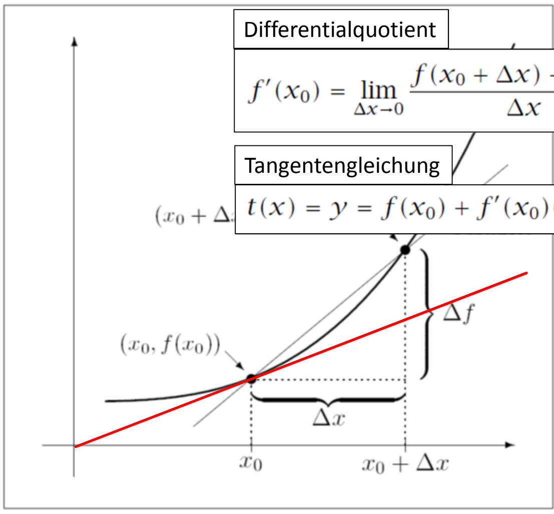
Differenzierbarkeit

Differentialquotient

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Tangentengleichung

$$t(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Differentialquotient

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x}{x - x_0}$$

Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, A ein offenes Intervall.
f heißt *differenzierbar* in A, wenn der *Differentialquotient*

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x}{x - x_0}$$

für alle Punkte $x_0 \in A$ existiert.
Die Funktion $f'(x) : A \to \mathbb{R}$ heißt dann erste *Ableitung* der Funktion f in A.

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Theorem

Ist eine Funktion $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Ableitungen einiger wichtigen Funktionen $f(x)$			
c	0	e^x	e^x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	a^x	$a^x \cdot \log a$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\log x = \ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}$
$\cos x$	$-\sin x$	x^x	$x^x(\log x + 1)$

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Wichtige Differentiationsregeln	
Mult. mit Konstante c	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Ableitung der Inversen	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Für die Ableitung der Inversen muss natürlich die inverse Funktion existieren und differenzierbar sein, weiters muss auch $f'(x) \neq 0$ sein. Die obige Formel folgt dann aus der Kettenregel, angewendet auf $f(f^{-1}(x)) = x$ (Rechnen Sie dies als Übung).

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Die Ableitung von $\arcsin(x)$

Der arcsin ist die Umkehrfunktion von sin auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Daher gilt:

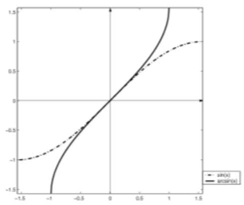
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Weiters wissen wir, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

also gilt $\quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

und damit insgesamt

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Für die Exponentialfunktionen a^x gilt

$$a^x = \exp(\log(a^x)) = \exp(x \log a)$$

und daher ist

$$(a^x)' = (\exp(x \log(a)))' = \exp(x \log(a)) \cdot \log a = a^x \log a.$$

Analog ist $(2^x)' = 2^x \log 2$.

Die Logarithmische Ableitung von x^x

$$x^x = \exp(\log(x^x)) = \exp(x \cdot \log x)$$

Ableitung mit Hilfe der Kettenregel

$$(\exp(x \cdot \log x))' = \exp(x \log x)(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$$

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

Die Ableitung von e^x

Die Exponentialfunktion ist definiert durch

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

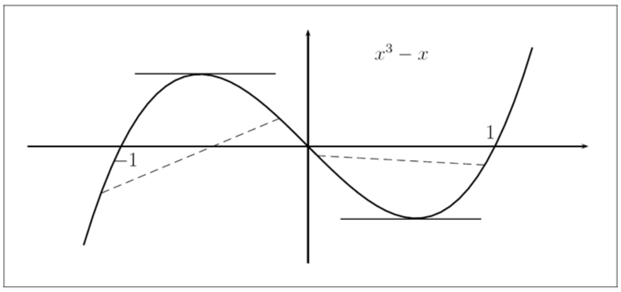
$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \quad = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \quad = e^x \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \cdots - 1\right)\right)$$

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h}\left(1 + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \cdots\right)\right)$$

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h}\left(1 + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \cdots\right)\right) \quad = e^x$$

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Extrema

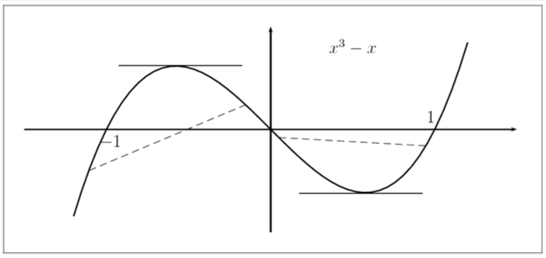


Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 ein *lokales Maximum* (*lokales Minimum*), wenn für alle Punkte x einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gilt, dass $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).

Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 ein *globales Maximum* (*globales Minimum*), wenn für alle Punkte $x \in A$ gilt, dass $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Krümmung



Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *konvex* in einem Intervall $[a, b]$, wenn die Funktion dort immer unter der Sekante liegt, d. h.,

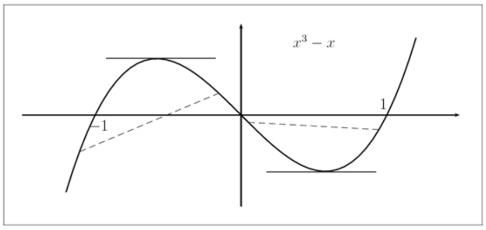
$$f(hx_1 + (1-h)x_2) \le hf(x_1) + (1-h)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall 0 \le h \le 1$$

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *konkav* in einem Intervall $[a, b]$, wenn die Funktion dort immer über der Sekante liegt, d. h.,

$$f(hx_1 + (1-h)x_2) \ge hf(x_1) + (1-h)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall 0 \le h \le 1$$

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Krümmung



Wenn wir den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - x$ betrachten, sehen wir, dass $f(x)$ auf $(-\infty, 0]$ konkav ist, auf $[0, \infty)$ konvex. Weiters bemerken wir, dass der Anstieg der Tangente an den Graphen im konkaven Bereich immer kleiner wird, je größer x wird, im konvexen Bereich immer größer. Das gilt auch allgemein.

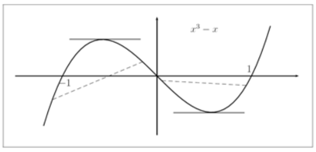
Theorem

$$f \text{ konkav} \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \le 0 \quad \forall x$$

$$f \text{ konvex} \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \ge 0 \quad \forall x$$

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

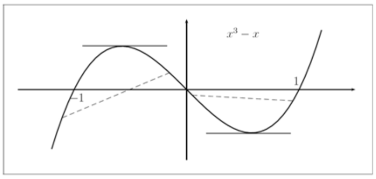
Finden von Etremata



1. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.
2. Finde alle x_i, an denen $f'(x_i) = 0$. Stationäre Punkte
3. Überprüfe $f''(x_i)$ für alle gefundenen Punkte:
   a) $f''(x_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist lokales Maximum.
   b) $f''(x_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist lokales Minimum.
   c) $f''(x_i) = 0 \quad \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Finden von Extremata



$f(x) = x^3 - x$

1. $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$.
2. $f'(x) = 0$ also $3x^2 - 1 = 0$ oder $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3} > 0$, d. h., Minimum in $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
   $f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -2\sqrt{3} < 0$, d. h., Maximum in $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Spezialfälle

Warum können wir nichts über den stationären Punkt x_0 aussagen, wenn wir wissen, dass $f''(x) = 0$.

Dazu einige Beispiele:

- $f(x) = x^3$ hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente, d. h., $f'(0) = f''(0) = 0$.
- $f(x) = x^4$ hat in $x_0 = 0$ ein Minimum und es gilt dort: $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$.
- $f(x) = x^5$ hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente und es gilt sogar $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$.

Die jeweils nächsten Ableitungen sind aber ungleich Null und geben Auskunft über die Art des stationären Punktes.

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Spezialfälle

Theorem

Sei $f : A \to B$ eine (mindestens) n-mal differenzierbare Funktion und x_0 ein stationärer Punkt (d. h. $f'(x_0) = 0$). Sei $f^{(n)}(x)$ die erste in x_0 nicht verschwindende Ableitung, d. h., $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so gilt:

- Ist n ungerade, so ist x_0 ein Wendepunkt bzw. Sattelpunkt.
- Ist n gerade, so ist x_0
  - ein Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$,
  - ein Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Höhere Ableitungen

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \qquad n \geq 0$$

n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0}$$

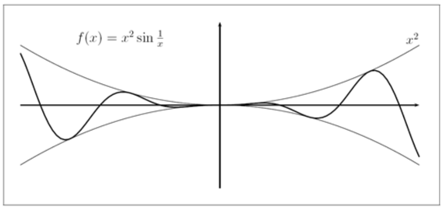
und sagen, eine Funktion f heißt in x_0 n-mal differenzierbar, wenn $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ in einer ganzen Umgebung von x_0 existieren und $f^{(n)}$ wenigstens im Punkt x_0.

Ist eine Funktion auf $\mathbb{R}$ sogar n-mal stetig differenzierbar, gehört sie zur Klasse $C^n(\mathbb{R})$; es gibt „sogar" $C^\infty(\mathbb{R})$ Funktionen (etwa $\sin x$).

Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Höhere Ableitungen

Funktionen müssen nicht beliebig oft differenzierbar sein.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ ist im 0-Punkt nicht stetig, da $\lim_{x \to 0} f'(x)$ nicht existiert

$f(x)$ ist aber dort differenzierbar

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

Differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Globale Extremata

Theorem

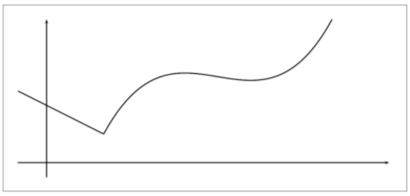
Ist die Funktion f stetig auf einem abgeschlossenen (kompakten) Intervall $[a,b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a,b), sind weiters $x_1,\dots,x_r$ die stationären Punkte von f in (a,b), so gilt für das Maximum von f auf $[a,b]$

$$\max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \max\{f(a), f(b), x_1, \dots, x_r\}$$

und für das Minimum von f auf $[a,b]$

$$\min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \min\{f(a), f(b), x_1, \dots, x_r\}\,.$$

Bei nicht differenzierbaren Funktionen komplizierter

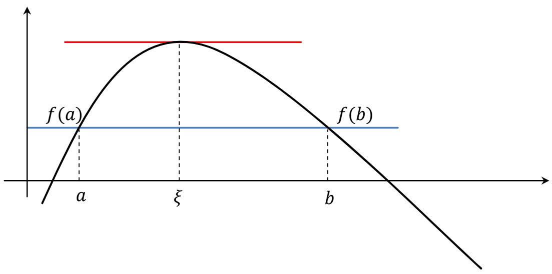


Differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Mittelwertsatz

Theorem (Satz von Rolle)

Ist die Funktion f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a,b), und ist $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



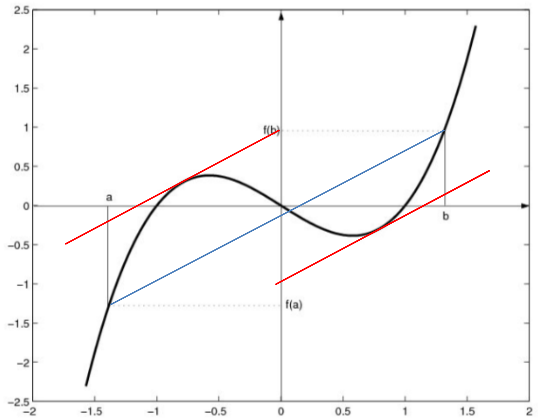
Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Mittelwertsatz

Theorem (Mittelwertsatz der Differentialgleichung)

Ist die Funktion f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b), so gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) .$$



Differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Kurvendiskussion

Definitionsmenge, Wertemenge, Graph

Unstetigkeitsstellen, Stetigkeitsstellen und -bereiche

Verhalten in Randpunkten und in obigen Stellen (Asymptoten)

Verhalten im Unendlichen (Asymptoten)

Nullstellen und zugehörige Steigungen der Tangenten

Kritische Punkte und Tangentensteigung in diesen Punkten

Extrema

Wendepunkte und Wendetangenten

Monotoniebereiche

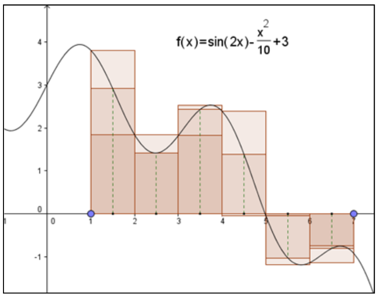
Konvexe bzw. konkave Bereiche

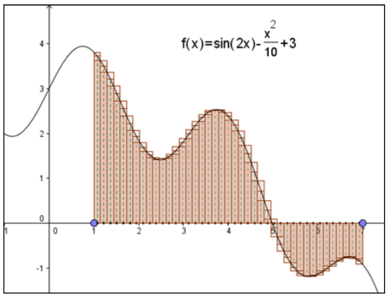
Integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Riemann-Integral

Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar, wenn die Riemannschen Untersummen $\underline{S}_r(f) = \sum_k \underline{f}_{k,r}\, 2^{-r}$ und Obersummen $\overline{S}_r(f) = \sum_k \overline{f}_{k,r}\, 2^{-r}$ einer Funktion gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser heißt dann das Integral der Funktion.

$$\lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) = \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f) = \int f(x)\, dx$$





www.geogebra.org

Integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) = F(x)|_b^a = F(b) - F(a)$$

$f(x)$ Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$.

$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Verallgemeinerungen

Rieman-Stieltjes Integral

Lebesgue-Integral

http://home.eduhi.at/teacher/alindner/Dyn_Geometrie/DiffInt/HS_DiffInt.htm

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Wir betrachten nun einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen bzw. deren Definitionen. Funktionen liefern (Funktions-)Werte für Elemente einer Definitionsmenge A. Diese Werte liegen in einer Werte- oder Bildmenge (*image*) B. Dabei muss gelten:

$$f : A \to B \text{ Funktion} \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A \;\; \exists! b \in B : \; f(a) = b\,.$$

Um uns ein Bild von einer Funktion zu machen, betrachten wir oft den Graphen G einer Funktion

$$G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A, \; f(a) \in B\} \subseteq (A \times B)\,.$$

Obwohl wir uns immer wieder reelle Funktionen vorstellen, d. h., Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, müssen wir bedenken, dass sowohl obige Definitionen als auch die Eigenschaften von Funktionen mit rein abstrakten Objekten funktionieren, solange sie in Mengen zusammengefasst werden können.

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

- Injektivität: $f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; x = y, \;\forall x, y \in A$.
- Surjektivität: $\forall b \in B \;\exists a \in A : f(a) = b$.
- Bijektivität: gleichzeitig surjektiv und injektiv.
  Bijektive Funktionen können invertiert (umgekehrt) werden:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id\,.$$

Exakt notiert gilt

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = id_a(a)$$

und

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = id_b(b)\,.$$

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

- Monoton wachsend: $\forall x < y : f(x) \leq f(y)$.
- Streng monoton wachsend: $\forall x < y : f(x) < f(y)$.
- Monoton fallend: $\forall x < y : f(x) \geq f(y)$.
- Streng monoton fallend: $\forall x < y : f(x) > f(y)$.
- Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$ (symmetrisch bezüglich y-Achse).
- Ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$ (punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs).
- Konvexe Funktion (strikt): $f''(x) > 0$ (Sekante immer über dem Funktionsgraphen).
- Konkave Funktion (strikt): $f''(x) < 0$ (Sekante immer unter dem Graphen).

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

Funktionen können verknüpft werden (Komposition von Funktionen):

$$f : A \to B,\ g : B \to C \quad \Rightarrow \quad g \circ f : A \to C, (g \circ f)(a) = g(f(a)) \in C\,.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Beispiel

$f(x) = 2x$ und $g(x) = e^x$, dann $(f \circ g)(x) = 2e^x$ und $(g \circ f)(x) = e^{2x}$.

Reelle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

Stetigkeit:

Funktionen heißen stetig (in x_0), wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta \, .$$

Wir unterscheiden auch zwischen linksseitig stetig, rechtsseitig stetig und stetig per se.

Reelle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

Differenzierbarkeit:

Um weitere Eigenschaften bzw. Charakteristika von Funktionen zu untersuchen, etwa Änderungsraten, Extremwerte, stationäre Punkte etc., benötigen wir die Begriffe der Ableitung bzw. des Differentialquotienten (→ differenzierbare Funktionen).

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x}{x - x_0}$$

Ebenso wichtige Begriffe sind konkav und konvex, die das Krümmungsverhalten einer Funktion (lokal oder global) beschreiben.

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$:

Integrierbarkeit:

Weiters können wir auch Flächen unter und zwischen Funktionen berechnen (→ integrierbare Funktionen).

Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar, wenn die Riemannschen Untersummen $\underline{S}_r(f) = \sum_k \underline{f}_{k,r}\, 2^{-r}$ und Obersummen $\overline{S}_r(f) = \sum_k \overline{f}_{k,r}\, 2^{-r}$ einer Funktion gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser heißt dann das Integral der Funktion.

$$\lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) = \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f) = \int f(x)\, dx$$