10 Mehrdimensionale Integration

Wir empfehlen allen, sich das Integrieren von reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ihren Mathematik-Schulbüchern anzusehen und sich die Integrationsregeln in Erinnerung zu rufen. Das mehrdimensionale Integrieren basiert auf dem eindimensionalen Integrieren, oftmals ist es nur das mehrfache Hintereinander-Ausführen eindimensionaler Integrationsmethoden. Das Integrieren von einfachen Polynomfunktionen, trigonometrischen Funktionen, rationalen Funkrionen, Wurzelfunktionen und der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion sollten sie beherrschen. Die Substitutionsmethode und das partielle Integrieren sollte sie kennen und können, bzw., ihr Wissen dahingehend auffrischen.

10.1 Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Für eindimensionale reelle Funktionen, d. h. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wird, um das (bestimmte) Integral über einem Intervall I zu berechnen, i.e. $\int_I f(x)\,dx$, das Intervall in Teilintervalle geteilt. Die darauf zu integrierende Funktion wird durch Treppenfunktionen angenähert und das Integral wird durch Bildung eines Grenzwertes berechnet (Riemannintegral).

Die Grundlage des Integrals bildet die *Volums-* oder *Inhaltsmessung* (das *Maß* ist die Länge des Intervalls, für Intervalle in $\mathbb{R}$).

Alle *wichtigen* Mengen in $\mathbb{R}$ sind Intervalle oder Vereinigungen bzw. Durchschnitte von Intervallen.

Im Mehrdimensionalen, i.e. in $\mathbb{R}^n$, entsprechen den Intervallen (verallgemeinerte) n-dimensionale Quader.

Definition 10.1
Die Menge $Q = [a, b) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *halboffener Quader* im $\mathbb{R}^n$, wobei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_i < b_i$ für alle i,.

$$Q = \{x \,|\, a_1 \leq x_1 < b_1, \ldots, a_n \leq x_n < b_n\}\,.$$

Q kann auch als kartesisches Produkt von Intervallen geschrieben werden

$$Q = [a, b) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)\,.$$

Definition 10.2
Der *Inhalt* oder das *Volumen* eines Quaders $Q = [a, b)$ ist definiert als

$$I(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ .$$

Im $\mathbb{R}^n$ sind Quader aber kein ausreichendes Mengensystem. Zum Beispiel kann eine Kreisscheibe nicht als endliche Vereinigung oder als endlicher Durchschnitt von Quadern dargestellt werden.

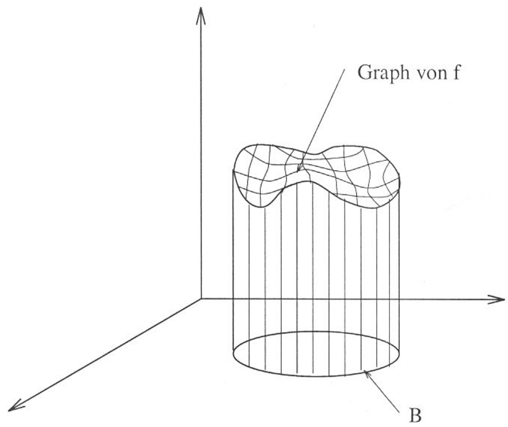
Im eindimensionalen „Raum“ $\mathbb{R}$ werden Funktionen $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ durch Treppenfunktionen angenähert (von *oben* und von *unten*) und die *Fläche unter der Funktion auf dem Intervall* $[a, b)$ durch Aufsummieren der Fläche der entstehenden Rechtecke approximiert. Im Limes (die Teilintervalle der Treppenfunktion werden immer kleiner) erhalten wir dann das *Integral* (die *echte Fläche*), falls die Limiten von *Obersumme* und *Untersumme* übereinstimmen.

Im $\mathbb{R}^n$ gehen wir für Funktionen $f : B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$, ähnlich vor, nur müssen wir hier auch im Definitionsbereich sicherstellen, dass die Menge B auch einen Inhalt besitzt. Es sind nun aber auch im $\mathbb{R}^n$ alle *wichtigen* Mengen als Vereinigung oder Durchschnitte von Quadern darstellbar, allerdings brauchen wir meist *unendlich* viele Vereinigungen oder Durchschnitte.

Beispiel 10.1
Sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

Das Volumen der Menge $M = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ wird das Integral von f über dem Bereich B genannt

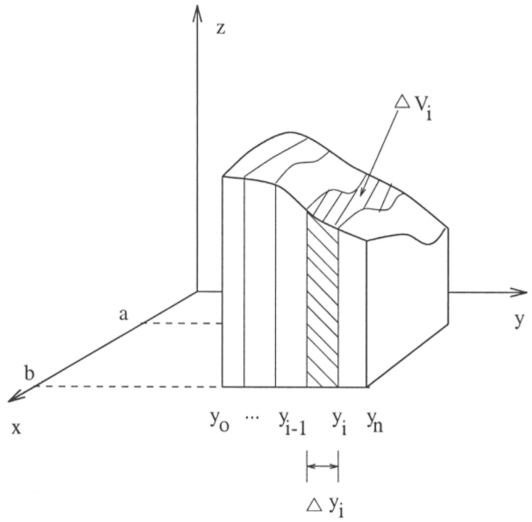
$$V = \iint_B f(x, y)\; dx\, dy\,.$$



Falls B ein Rechteck ist,

$$B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, a \leq x \leq b \text{ und } c \leq y \leq d\}\,,$$

ist das folgendermaßen zu berechnen.



Eine Scheibe hat ungefähr das Volumen: $\Delta V_i \approx \Delta y_i \int_a^b f(x, y_i)\, dx$
Alle Scheiben zusammen ergeben: $V \approx \sum_{i=1}^n (\int_a^b f(x, y_i) dx)\, \Delta y_i$
Für $n \to \infty$ und $\max(\Delta y_i) \to 0$ gilt

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [\int_a^b f(x, y_i) dx] \Delta y_i = \int_c^d \int_a^b f(x, y_i)\, dx dy$$

Theorem 10.1 (Satz von Fubini)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, dann gilt:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy dx\,.$$

D. h., die Integrationsreihenfolge kann vertauscht werden. Der Satz von Fubini kann auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

Integration über Normalbereiche

Theorem 10.2
Sei ein Bereich folgendermaßen gegeben:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rcccl} a & \leq & x_1 & \leq & b \\ f_1(x_1) & \leq & x_2 & \leq & g_1(x_1) \\ f(x_1, x_2) & \leq & x_3 & \leq & g_2(x_1, x_2) \\ & & \vdots & & \\ f_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) & \leq & x_m & \leq & g_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) \end{array} \right\},$$

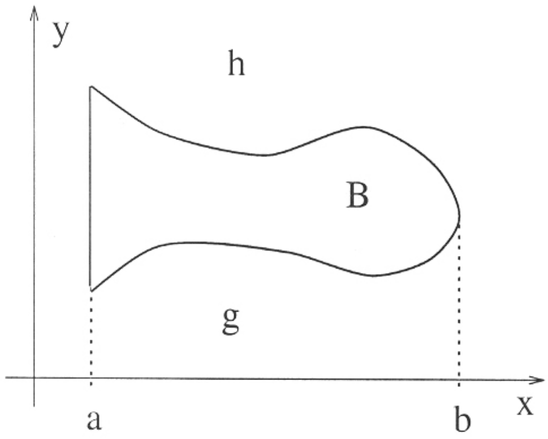
die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ und $g_1, \ldots, g_m$ stetig, dann gilt:

$\int_B f(x_1, \ldots, x_m) d(x_1, \ldots, x_m) = \int_a^b \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \cdots \int_{f_{m-1}(x_1,\ldots,x_{m-1})}^{g_{m-1}(x_1,\ldots,x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_m) dx_m\, dx_{m-1} \cdots dx_2\, dx_1$

Beispiel 10.2
Seien $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \le h$,

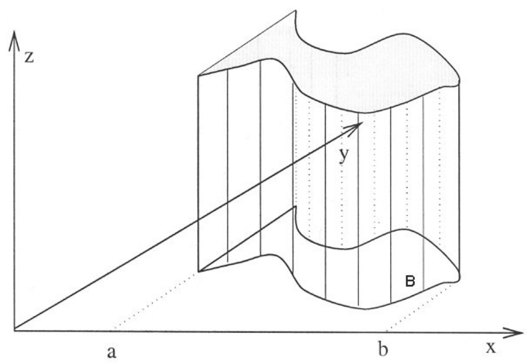
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccccc} a & \le & x & \le & b \\ g(x) & \le & y & \le & h(x) \end{array} \right\},$$

dann ist B ein Normalbereich.

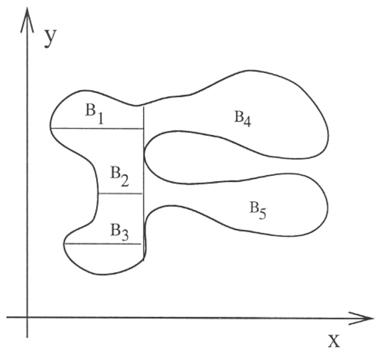


Für das Integral einer Funktion f auf diesem Bereich gilt dann:

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy\, dx\,.$$



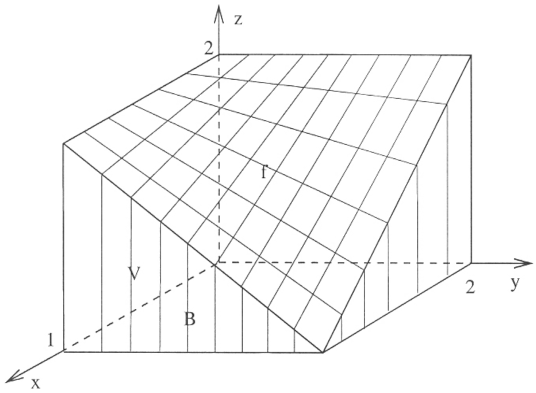
Es gibt auch kompliziertere Mengen (Nicht-Normalbereiche). Diese müssen in kleinere Teilbereiche zerlegt werden, und dann kann auf den einfacheren Bereichen ein Integral berechnet werden.



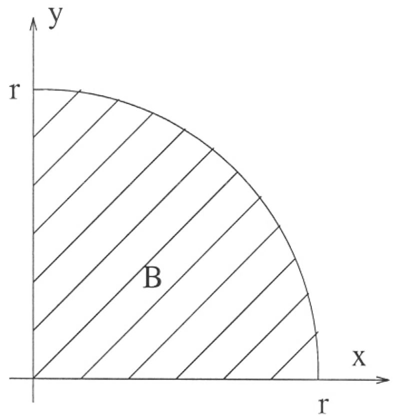
Beispiel 10.3
Als konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x,y) = 2 - xy$ auf dem Bereich $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \right\}$.

Es gilt dann:

$$\iint_B (2-xy)\,dxdy = \int_0^2 \int_0^1 (2-xy)\,dxdy = \int_0^2 [2x - \frac{x^2 y}{2}]_0^1\,dy = \int_0^2 (2 - \frac{y}{2})\,dy = [2y - \frac{y^2}{4}]_0^2 = 3$$



Beispiel 10.4
Es soll $\iint_B x^3 y^2\,dxdy$ berechnet werden, wobei $B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ der unten skizzierte Viertelkreis ist.



B ist ein Normalbereich, denn es gilt:

$$B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq r,\ 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \} .$$

Das obige Integral ist also:

$$\int_0^r (\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y^2 \, dy) \, dx = \frac{1}{3} \int_0^r x^3 (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx .$$

Mittels partieller Integration ($u = x^2, v' = x(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$) erhalten wir $\frac{2}{105} r^7$ als Ergebnis.

Wir können B auch anders anschreiben und die Reihenfolge der Variablen vertauschen:

$$B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq y \leq r, 0 \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \} .$$

Das Integral ist dann

$$\int_0^r (\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} x^3 y^2 dx) \, dy = \frac{1}{4} \int_0^r y^2 (r^2 - y^2)^2 \, dy = \frac{2}{105} r^7 .$$

Wie wir sehen ist dieses Integral etwas einfacher zu berechnen. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge können wir eventuell einigen Rechenaufwand einsparen.

10.2 Koordinatentransformation in Integralen

Aus der eindimensionalen Integralrechnung kennen wir die **Substitutionsregel**:

Sei $g : [c, d] \to [a, b]$ differenzierbar und streng monoton, dann ist g bijektiv, also invertierbar. Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Bildbereich von g definiert.

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) \, dt$$

oder äquivalent dazu

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx\,.$$

Eine analoge Regel dazu gibt es auch im Mehrdimensionalen.

Theorem 10.3 (Transformationssatz)
Sei g eine umkehrbare differenzierbare Funktion von A nach B ($A, B \subset \mathbb{R}^n$).
Weiters sei f eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$.

Dann gilt: Falls eines der beiden Integrale

$$\int_B f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$$

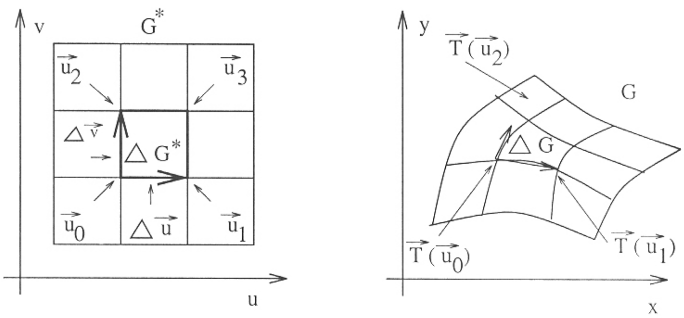
oder

$$\int_A f(g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_n)) \cdot \det(J_g(t_1, \ldots, t_n))\, d(t_1, \ldots, t_n)$$

existiert und die Determinante der Jacobi-Matrix $\det(J_g(t_1, \ldots, t_n))$ der ersten partiellen Ableitungen von g ungleich 0 ist, so existiert auch das zweite Integral und die beiden sind gleich.

Also kurz geschrieben:

$$\int_B f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \int_{g^{-1}(B)} f(g(t)) \cdot \det(J_g(t))\, dt$$

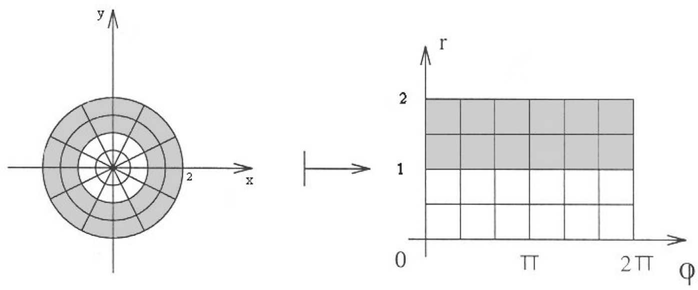


Beispiel 10.5 (Polarkoordinatentransformation)
Manchmal ist es einfacher, statt in kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten zu rechnen. Sei etwa folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_N xy\; dxdy \quad \text{mit} \quad N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}\,,$$

dann können wir uns folgende *natürliche* Transformation überlegen:

$$g : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{mit} \quad x = r\cos\theta,\; y = r\sin\theta, \quad \text{also} \quad g(r, \theta) = (x, y)\,.$$



Dann ist $M = \{(r,\theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ und obiges Integral kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\int_N xy\ dxdy = \int_M r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot \det(J_g(r,\theta))\ drd\theta\,.$$

Da $J_g(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, ist $\det(J_g(r,\theta)) = r\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$.

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_N xy\ dxdy &= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\ d\theta\, dr \\
&= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \cdot \sin\theta\ d\theta\, dr \\
&= \int_0^{\pi/2} [\tfrac{r^4}{4}\cos\theta \cdot \sin\theta]_{r=1}^2\ d\theta \\
&= \tfrac{15}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta\ d\theta \\
&= \tfrac{15}{4} [\frac{\sin^2\theta}{2}]_{\theta=0}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{15}{8}
\end{aligned}$$