# 11 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die mindestens einen Differentialquotienten enthalten. Sie heißen *von der Ordnung* $n$, wenn der höchste vorkommende Differentialquotient von der Ordnung $n$ ist (d. h., die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion eine $n$-te ist).

Ein Beispiel einer allgemeine Differentialgleichung vierter Ordnung wäre etwa

$$y^{(4)}(x) - 3y'''(x) + 3x^2 y''(x) - \log(x)(y'(x))^3 - y^2(x) = 3\cos(x)\,.$$

Wir unterscheiden weiters zwischen allgemeinen Differentialgleichungen und sogenannten *Anfangswertproblemen*, bei denen Startwerte der beteiligten Funktionen bekannt sind. Weiters gibt es auch noch sogenannte *Randwertprobleme*, die Differentialgleichungen auf (nicht notwendigerweise endlichen) Intervallen betreffen, wobei Randwerte, d. h., Funktionswerte oder Werte der Ableitungen am Rand als Nebenbedingungen auftreten.

Das Lösen von Differentialgleichungen – das Integrieren – ist mindestens so schwer, wie die Stammfunktion eines Integrals zu finden. Wir werden uns hier auf einfache aber dennoch wichtige Spezialfälle beschränken.

## 11.1 Lösung einfacher Differentialgleichungen

### 11.1.1 $y'(x) = a(x)$ – Einfaches Integrieren

Sei die Differentialgleichung von der Form

$$y'(x) = a(x)\,.$$

Wir haben also

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad dy = a(x)\,dx\,.$$

Durch Integration erhalten wir die Lösung

$$y(x) = \int a(x)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 11.1

$$y'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + c\,.$$

Haben wir zusätzlich die *Anfangswertbedingung* $y(0) = 4$, so erhalten wir durch Einsetzen

$$y(0) = 0^3 + c = 4, \quad \text{d. h.} \quad c = 4 \quad \text{also} \quad y(x) = x^3 + 4\,.$$

### 11.1.2 $y'(x) = a(x)f(y)$ – Trennung der Variablen

Ist die Differentialgleichung von der Form

$$y'(x) = a(x)f(y)\,,$$

so erhalten wir durch Umformen schrittweise

$$\frac{dy}{dx} = a(x)f(y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{f(y)} = a(x)\,dx\,,$$

und daraus durch Integrieren (und Zusammenfassen beider Integrationskonstanten auf einer Seite) die Lösung

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int a(x)\,dx + c\,.$$

D. h., die Variablen $x$ und $y$ wurden getrennt, d. h., kommen nur auf jeweils einer Seite der Gleichung vor.

Beispiel 11.2
Sei folgende Differentialgleichung gegeben

$$y'(x) + xy^2(x) = 0\,.$$

So ist

$$\frac{dy}{dx} = -xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{y^2}\,dy = x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad -\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx + c\,,$$

also

$$\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c_1 = \frac{x^2+c}{2} \qquad \text{d. h.} \quad y(x) = \frac{2}{x^2+c}\,.$$

Ist zusätzlich $y(0) = 1$ gefordert, so folgt $c = 2$, also $y(x) = \dfrac{2}{x^2+2}$.

## 11.2 Die Logistische Differentialgleichung

Definition 11.1
Die *logistische Differentialgleichung* hat die Form

$$y'(x) - ky(x)(L - y(x)) = 0, \qquad k > 0, \quad 0 \leq y(x) \leq L,\ L \in \mathbb{R}$$

Diese Differentialgleichung wird auch als Differentialgleichung des *beschränkten exponentiellen Wachstums* bezeichnet. Der Parameter L gibt die Obergrenze an.

Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = ky(L-y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y(L-y)} = k\,dx\,.$$

Wir substituieren auf der linken Seite:

$$z = \frac{y-L}{y} = 1 - \frac{L}{y} \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{L}{y^2}\, dy$$

Durch Integration erhalten wir ($y \leq L$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(L-y)} &= -\frac{1}{L} \int \frac{y}{(y-L)} \cdot \frac{L}{y^2}\, dy = -\frac{1}{L} \int \frac{1}{z}\, dz \\
&= -\frac{1}{L} \log |\, z\, | + c = -\frac{1}{L} \log |\, \frac{y-L}{y}\, | + c \\
&= -\frac{1}{L} \log(\frac{L-y}{y}) + c
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$-\frac{1}{L} \log(\frac{L-y}{y}) = kx + c$$

Durch Umformen nach y ergibt sich dann schließlich die allgemeine Lösung der logistischen Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{L}{1 + Ce^{-Lkx}}$$

BEISPIEL 11.3
In einem Ort mit 5100 Einwohnern bricht eine Grippeepidemie aus. Zu dem Zeitpunkt als die Krankheit erkannt wird, sind 100 Bewohner erkrankt; 10 Tage später sind es 1000. Wie lässt sich der Epidemieverlauf beschreiben?

Sei $y(t)$ die Anzahl der betroffenen Einwohner, die bis zum Zeitpunkt $t$ erkrankt sind. Wir nehmen exponentielles Wachstum an mit Obergrenze $L = 5100$.

Die allgemeine Lösung der logistischen Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = \frac{5100}{1 + Ce^{-5100kt}}$$

Die Parameter k und C bestimmen wir folgendermaßen:

$$y(0) = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{5100}{1+C} = 100 \quad \Rightarrow \quad C = 50\,.$$

$$y(10) = 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{5100}{1 + 50\, e^{-5100.10k}} = 1000 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}00005\,.$$

Insgesamt erhalten wir somit als Lösung:

$$y(x) = \frac{5100}{1 + 50\, e^{-0{,}25t}}\ .$$

## 11.3 Lineare Differentialgleichungen

Eine spezielle Form von Differentialgleichungen sind die *linearen Differentialgleichungen* , in denen die Funktion und deren Ableitungen nur in linearer Form enthalten sein dürfen.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = s(x),\ \ a_i \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung.

**Die Lösung von linearen Differentialgleichungen**

Die Lösung einer linearen Differentialgleichung hat stets die Form

$$y = y_h + y_p$$

wobei $y_h$ die Lösung der homogenen Differentialgleichung (DG) ist, d. h. DG $= 0$, und $y_p$ eine *partikuläre Lösung*, d. h., eine spezielle Lösung ist, für DG $= s(x)$.

In der Physik sprechen wir von $y_h$ auch noch als *zero input response* ($s(x) = 0$) und von $y_p$ als *zero state response* ($y_0 = 0$).

### 11.3.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 11.2
Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* hat stets die Form

$$y'(x) + a(x)y(x) = s(x)$$

wobei $a(x)$ und $s(x)$ integrierbare Funktionen sein müssen.

Ist $s(x) = 0$ so sprechen wir von einer *homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung*.

### 11.3.2 Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

Wir müssen also zuerst die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

lösen.

Wie erreichen dies durch *Trennung der Variablen*:

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{y}\,dy = -a(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int a(x)\,dx\,.$$

Durch Integrieren erhalten wir (wobei log – wie in der Mathematik üblich – den Logarithmus naturalis bezeichnet und wir statt der Integrationskonstanten $c$ die Konstante $\log(C)$ verwendeten)

$$\log(y(x)) = -\int a(x)\,dx + \log(C) \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,,$$

wobei wir rechts die Rechenregeln für Logarithmen anwendeten.
Es ergibt sich also die Lösung

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,.$$

Beispiel 11.4
Sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y' + 3x^2 y = 0 \quad \text{oder} \quad y' = -3x^2 y\,.$$

Wir haben

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{y}\,dy = -3x^2\,dx$$

und durch Integration

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int 3x^2\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \log(y) = -x^3 + \log(C)$$

also

$$y(x) = C \cdot e^{-x^3}\,.$$

Ist der Anfangswert $y(0) = 2$ gefordert, so ergibt sich $C = 2$, also $y(x) = 2e^{-x^3}$.

### 11.3.3 Die partikuläre Lösung

Sei nun wie oben

$$y'(x) + a(x)y(x) = s(x)\,.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $s(x) = s$ und $a(x) = a \neq 0$ sind (reelle) Konstante, also $y'(x) + ay(x) = s$.
   Dann setzen wir
   $$y_p = \frac{s}{a}\,,$$
   denn dann ist $y_p' + a \cdot \frac{s}{a} = s$ und $y_p' = (\frac{s}{a})' = 0$ (Ableitung einer Konstanten), also $y_p'(x) = 0$.

2. $s(x)$ oder $a(x)$ nicht konstant: Lösung durch *Variation der Konstanten:*
   Wir ersetzen in der Lösung der homogenen Differentialgleichung die Konstante $C$ durch eine Funktion $C(x)$ und setzen so an:
   $$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,.$$
   Durch Einsetzen in
   $$y_p' + a(x)y_p = s(x)$$
   erhalten wir
   $$e^{-\int a(x)\,dx}(C'(x) - a(x)C(x)) + a(x)C(x)e^{-\int a(x)\,dx} = s(x)\,,$$
   d. h.
   $$e^{-\int a(x)\,dx}C'(x) = s(x) \qquad \text{oder} \qquad C'(x) = s(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}\,,$$
   somit
   $$C(x) = \int s(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}\,dx\,.$$

Hier muss das Integral nach $x$ im Exponenten zuerst berechnet werden, d. h., bevor das äußere Integral nach $x$ aufgelöst wird. Wir erhalten dann die allgemeine Lösung $y = y_h + y_p$

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \cdot \left( C + \int s(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}\, dx \right) .$$

Beispiel 11.5
Sei die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' + \frac{1}{x} y = x^2 + 4$ gegeben.
Wir berechnen zuerst die homogene Lösung $y_h$ und dann die partikuläre Lösung $y_p$.

**Die homogene Lösung** $y_h$ : Es ist

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \log(y_h) = -\log(x) + \log(C) = \log(\frac{C}{x}) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_h(x) = \frac{C}{x} .$$

**Die inhomogene Lösung** $y_p$ : Durch Variation der Konstanten:
Wir differenzieren $y_p = \dfrac{C(x)}{x}$ und erhalten $y_p' = \dfrac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$.
Das in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{C(x)}{x} = x^2 + 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad C'(x) = x^3 + 4x ,$$

also folgt

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2$$

und

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3}{4} + 2x .$$

Als Lösung erhalten wir

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4} + 2x .$$

Ist der Anfangswert $y(1) = 1$ gegeben, so folgt

$$y(1) = 1 = \frac{C}{1} + \frac{1}{4} + 2 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-5}{4x} + \frac{x^3}{4} + 2x .$$

Wollen wir eine Probe berechnen, so berechnen wir $y'$ der allgemeinen Lösung, setzen diese in die Angabe

$$y' + \frac{1}{x} y = x^2 + 4$$

ein und überprüfen, ob die Differentialgleichung erfüllt ist.

### 11.3.4 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Definition 11.3
Eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung* hat stets die Form

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = s(x)\,.$$

Ist $s(x) = 0$ so sprechen wir von einer *homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*.

Wie bei der linearen Differentialgleichung erster Ordnung ergibt sich die allgemeine Lösung als Summe der homogenen und der partikulären Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Da wir uns auf einfache Fälle beschränken müssen, betrachten wir nur den Fall, dass die Funktionen $a_1(x)$, $a_2(x)$ und $s(x)$ konstant sind.

Definition 11.4
Eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* hat die Form

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = s, \qquad a_1, a_2, s \in \mathbb{R}.$$

Ist $s = 0$ so sprechen wir von einer *homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*.

### 11.3.5 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aus unserer Erfahrung mit homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung vermuten wir den allgemeinen Ansatz

$$y(x) = C \cdot e^{\lambda x}\,.$$

Wir berechnen die erste und zweite Ableitung und setzen in die Differentialgleichung ein. Aus

$$y'(x) = \lambda C e^{\lambda x} \qquad \text{und} \qquad y''(x) = \lambda^2 C e^{\lambda x}\,,$$

und aus der gegebenen Differentialgleichung folgt

$$Ce^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0\,.$$

D. h., unser angenommenes $y(x)$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = 0\,,$$

wenn

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

ist. Diese Gleichung heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung.

**Lösung der charakteristischen Gleichung**

Die charakteristische Gleichung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine quadratische Gleichung der Form

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

und hat demnach die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}\,.$$

Wir unterscheiden drei Fälle, je nach Größe der Diskriminante:

1. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$: Wir haben zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ der charakteristischen Gleichung und demnach zwei (unabhängige) Lösungen der Differentialgleichung

$$y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = C_2 e^{\lambda_2 x}$$

und wegen der Linearität der Differentialgleichung ist auch deren Summe eine Lösung (nachrechnen), sodass die allgemeine Lösung in diesem Fall lautet:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,.$$

2. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$: Die charakteristische Gleichung hat die Doppellösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und somit ergeben sich die Lösungen (Nachweis durch Einsetzen) der Differentialgleichung zu

$$y_1(x) = C_1 e^{\lambda x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = C_2 x e^{\lambda x}\,.$$

Wegen der Linearität der Differentialgleichung ist die Summe wiederum Lösung, d. h., die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}\,.$$

3. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$: Die charakteristische Gleichung hat die beiden komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \cdot \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_2\right|} \doteq a \pm ib\,.$$

Die komplexen Lösungen der Differentialgleichung lauten daher:

$$\begin{array}{rcccl} y_1(x) & = & C_1'\, e^{(a+ib)x} & = & C_1' e^{ax} e^{ibx} \\ y_2(x) & = & C_2'\, e^{(a-ib)x} & = & C_2' e^{ax} e^{-ibx} \end{array}$$

oder aber, mit $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$,

$$y(x) = C_1' e^{ax} e^{ibx} + C_2' e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} \cdot (C_1' e^{ibx} + C_2' e^{-ibx})\,.$$

Wegen der Euler'schen Formel $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\sin\varphi$ gilt

$$y(x) = e^{ax} \cdot (C_1' \cos(bx) + C_1' i \sin(bx) + C_2' \cos(bx) - C_2' i \sin(bx))$$

also

$$y(x) = e^{ax} \cdot [(C_1' + C_2') \cos(bx) + (C_1' - C_2') i \sin(bx)] \,.$$

Mit $C_1 \doteqdot C_1' + C_2'$ und $C_2 \doteqdot (C_1' - C_2')i$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{ax} \cdot (C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)) \,,$$

eine oszillierende Funktion. Die Schwingung ist gedämpft, falls $a < 0$, konstant mit $a = 0$ und sie wächst mit $a > 0$.

---

## Exkurs: $\mathbb{C}$ – Die komplexen Zahlen

In den reellen Zahlen gibt es einfache Gleichungen, die nicht in $\mathbb{R}$ gelöst werden können, etwa $x^2 + 1 = 0$. Diese ist jedoch in den komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$$

lösbar. Dabei bezeichnet $a$ den Realteil und $b$ den Imaginärteil einer komplexen Zahl $a + ib$. $i = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit, 1 die reelle Einheit (Bem.: in den Ingenieurswissenschaften ist es üblich die komplexe Einheit mit $j$ zu bezeichnen).

Alle Gleichungen in $\mathbb{C}$, d. h. mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, sind in $\mathbb{C}$ lösbar, daher auch alle Gleichungen mit reellen, rationalen, ganzzahligen oder natürlichen Koeffizienten – Fundamentalsatz der Algebra. Das heißt auch, dass jedes Polynom in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Weiters ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper.

Komplexe Zahlen spielen eine große Rolle in der Elektrotechnik und Elektronik, wo sie zur Berechnung von Strömen notwendig sind, sowie in der Ökologie bei der Modellierung von Ökosystemen.

### Rechenregeln in $\mathbb{C}$

Seien $x = a + ib$ und $y = c + id$ komplexe Zahlen $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, so ist

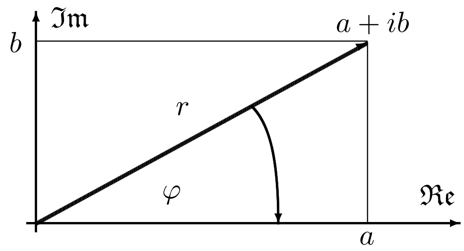
- die Summe $x + y = (a + c) + i(b + d)$
- das Produkt $x \cdot y = (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c) + i(b \cdot c + a \cdot d) + i^2(b \cdot d) = (ac - bd) + i(bc + ad)$
- die konjugiert komplexe Zahl zu $x$ ist $\bar{x} = a - ib$
- der Quotient $\frac{x}{y} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$
- der Betrag von $x$ ist $|x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Es gelten weiters auch alle Rechenregeln von $\mathbb{R}$.

### Darstellungen von komplexen Zahlen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, komplexe Zahlen darzustellen:

- als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.
- als Vektoren in der (komplexen) Ebene (siehe Abbildung)
- in der Polardarstellung als geordnetes Paar $(r, \varphi)$ mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (siehe Abbildung). Umgekehrt gilt: $a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- als reelle $2 \times 2$-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$




**Rechnen in Polarkoordinaten**

Die Darstellung der komplexen Zahlen mittels Polarkoordinaten vereinfacht einige Rechnungen. Seien $x = (r, \varphi)$ und $y = (s, \psi)$ komplexe Zahlen, so gilt:

- $x \cdot y = (r \cdot s, \varphi + \psi)$
- $x^n = (r^n, n \cdot \varphi)$
- $\sqrt[n]{x} = (\sqrt[n]{r}, \frac{k \cdot \varphi}{n})$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Ende: Exkurs komplexe Zahlen

---

Beispiel 11.6
Die Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und somit die Lösung

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left( C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) .$$

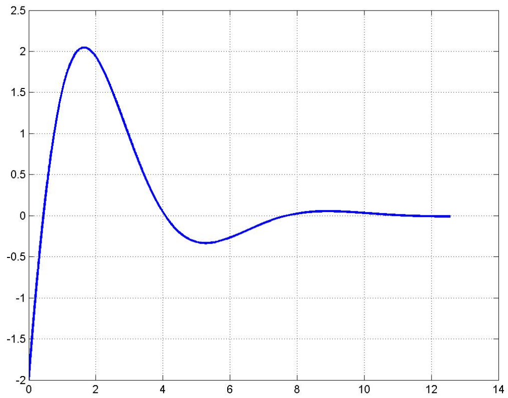



**Abbildung 11:** $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-2 \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + 5 \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

### 11.3.6 Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung lässt sich wieder als

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

darstellen. Da alle Koeffizienten konstant sind, lässt sich die partikuläre Lösung recht einfach finden. Sie ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{s}{a_2} && \text{falls } a_2 \neq 0 \\ y_p(x) &= \frac{s}{a_1}x && \text{falls } a_2 = 0,\ a_1 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Falls die Koeffizienten nicht konstant wären, müssten wir wieder die Methode der Variation der Konstanten zur Berechnung der partikulären Lösung heranziehen.

Beispiel 11.7
Die Differentialgleichung

$$y''(x) - y(x) = 3$$

hat die homogene Lösung

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{s}{a_2} = \frac{3}{-1} = -3$$

und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 3\ .$$

Sind weiters die Anfangswerte

$$y(0) = 3 \qquad y'(0) = 4$$

gegeben, so berechnen wir aus

$$y(0) = 3 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 + C_2 - 3 = 3$$

und

$$y'(0) = C_1 - C_2 = 4\,,$$

dass

$$C_1 = 5 \qquad \text{und} \qquad C_2 = 1\,,$$

sodass wir folgende Lösung dieses Anfangswertproblems erhalten:

$$y(x) = 5e^x + e^{-x} - 3\,.$$

## 11.4 Systeme von Differentialgleichungen

### 11.4.1 Systeme linearer Differentialgleichungen

Wir betrachten hier zunächst nur Systeme linearer homogener Differentialgleichungen mit zwei Variablen und konstanten Koeffizienten.

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax + by \\ \dot{y} & = & cx + dy \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

wobei $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix. Durch Diagonalisierung können wir das System entkoppeln und lösen. Entscheidend dafür ist die Struktur der Eigenwerte der Matrix A.

Beispiel 11.8
Gegeben sei das System

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x + 2y \\ \dot{y} & = & 2x + y \end{array}$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$.

Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die beiden Eigenvektoren fassen wir in der Matrix $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zusammen.

Es gilt nun dass $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}AT$ ist.

Wir nehmen nun folgende Koordinatentransformation vor: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Es gilt dann: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = T^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Das Gleichungssystem ist nun entkoppelt, d. h., die Koeffizientenmatrix diagonalisiert

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \;\;3\; u \\ \dot{v} &= -\; v \end{aligned}$$

und kann leicht gelöst werden.

Es ist $u(t) = C_1 e^{3t}$ und $v(t) = C_2 e^{-t}$.

Durch Rücktransformation erhalten wir schließlich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} C_1e^{3t} - C_2e^{-t} \\ C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \end{pmatrix}$$

d. h.,

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{3t} - C_2e^{-t} \\ y(t) &= C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \end{aligned}$$

### 11.4.2 Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen

Im Allgemeinen gibt es für Systeme von nichtlinearen Differentialgleichungen nicht immer explizite Lösungsformeln wie bei linearen Differentialgleichungssystemen. Wir schauen uns nur ein spezielles aber auch besonders wichtiges Beispiel an.

**Räuber-Beute-Gleichung, das Lotka-Volterra-Modell**

Sei $x(t)$ die Anzahl der Beutetiere und $y(t)$ die Anzahl der Räuber in einer Population.

Die relativen Änderungsraten in der Population werden folgendermaßen modelliert:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= \;\;a - by \qquad && a, b \geq 0 \\ \frac{\dot{y}}{y} &= -c + dx \qquad && c, d \geq 0 \end{aligned}$$

$a$ ist die Wachstumsrate der Beutetiere, $b$ der Ausfall durch Gefressen-Werden, $c$ die Sterberate der Raubtiere, $d$ der Zuwachs proportional zur Anzahl der vorhandenen Beutetiere. Wird in das Gleichgewicht eingegriffen, etwa durch Dezimierung der Beutetiere (z.B. Überfischung, Insektizide), dann beeinflusst das auch die Population der Räuber.

Als Differentialgleichungssystem erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(a - by) \\ \dot{y} &= y\,(-c + dx) \end{aligned}$$

Wenn wir ein System von (nichtlinearen) Differentialgleichungen haben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\ . \end{aligned}$$

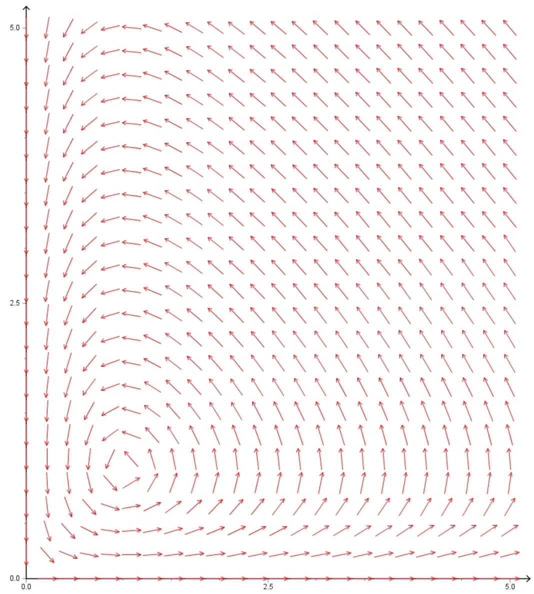



**Abbildung 12:** $\dot{x} = x(1-y)$ und $\dot{y} = y(-1+x)$.

können wir folgende geometrische Interpretation zu Hilfe nehmen:

Jedem Zeitpunkt $t$ wird ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zugeordnet. Das entspricht einer ebenen Kurve (siehe mehrdimensionale Analysis). Der Vektor $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ kann als Geschwindigkeitsvektor an der jeweiligen Stelle interpretiert werden.

Definition 11.5
Ein Punkt $(x^*, y^*)$ heißt *Gleichgewichtspunkt* des Differentialgleichungssystems, wenn sowohl $f(x^*, y^*) = 0$ als auch $g(x^*, y^*) = 0$ gilt.

Die Lotka-Volterra-Gleichung hat zwei Gleichgewichtspunkte: $(0,0)$ und $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Für biologische Modelle sind nur positive Werte sinnvoll, d. h. $x, y \geq 0$.
Auf der $x$-Achse erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\, e^{at} \\ y(t) &= 0 \end{aligned}$$

und auf der $y$-Achse

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= y_0\, e^{-ct} \end{aligned}$$

Um den Punkt $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ herum „zirkulieren“ die Lösungskurven der Differentialgleichung.