GMA

Grundlagen Mathematik und Analysis

Reelle Funktionen 3

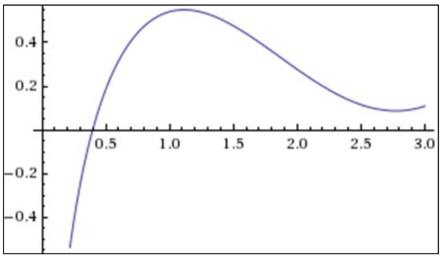
Christian Cenker
Gabriele Uchida

Data Analytics and Computing

Nullstellen und Fixpunkte

Nullstellen

Nullstellenproblem. Sei eine Funktion $f: B \to \mathbb{R}^m$ gegeben, mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$.
Bestimme eine Nullstelle x_0 von $f(x)$, d. h., $f(x_0) = 0$!



$f(x) = \cos x + \log x$

$f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$f(x) = 0, \qquad x = ?$

Nullstellen und Fixpunkte

Fixpunkte

Fixpunktproblem. Sei eine Abbildung $T : B \to B$ gegeben, mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme einen Fixpunkt x^* von T, d. h., $T(x^*) = x^*$.

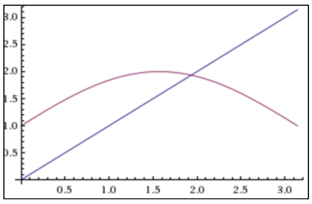
Beispiel 1

$$T(x) = x^2 \qquad T(x^*) = x^*$$
$$T(x^*) = (x^*)^2 = x^* \quad \Longrightarrow (x^*)^2 - x^* = x^*(x^* - 1) = 0$$
$$\Longrightarrow \; x_1^* = 0 \;\text{ und }\; x_2^* = 1$$

Beispiel 2

$$T(x) = 1 + \sin x$$

$$T(x^*) = x^*, \; x^* = ?$$



Nullstellen und Fixpunkte

Nullstellen und Fixpunkte

Nullstellenproblem. Sei eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}^m$ gegeben, mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme eine Nullstelle x_0 von $f(x)$, d. h., $f(x_0) = 0$!

Fixpunktproblem. Sei eine Abbildung $T : B \to B$ gegeben, mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme einen Fixpunkt x^* von T, d. h., $T(x^*) = x^*$.

Äquivalenz von Nullstellen- und Fixpunktproblem

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = x + f(x) \;\text{ und }\; T(x) = x$$
$$f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x_0) = x_0$$

$$T(x^*) = x^* \quad \Leftrightarrow f(x) = T(x) - x \;\text{ und }\; f(x) = 0$$
$$T(x^*) = x^* \quad \Leftrightarrow \; f(x^*) = 0$$

Nullstellen und Fixpunkte

Kontraktion

Definition

Eine Abbildung $T: B \to B,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Kontraktion auf B,
Wenn es ein q gibt mit $0 < q < 1$, sodass

$$\|T(x) - T(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|$$

Beispiel

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$$

Nullstellen und Fixpunkte

Fixpunktsatz

Fixpunktsatz von Banach

Sei $T: B \to B,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion auf B.
Sei $x_0 \in B$ beliebig und $x_k = T(x_k), k = 1,2,3, \ldots$ eine iterierte Folge.

Es ist dann $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ mit $T(x^*) = x^*$, d.h. x^* ist Fixpunkt.

Beweisidee

$$\|T(x_1) - T(x_0)\| \leq q\|x_1 - x_0\|$$

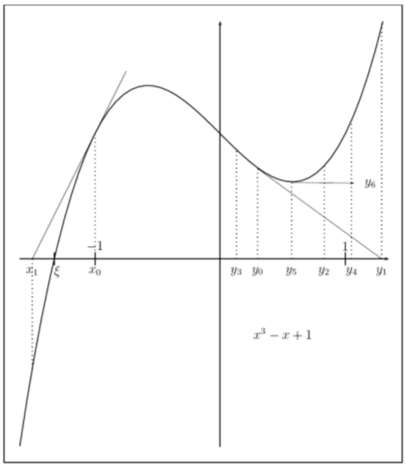
$$\|T(x_2) - T(x_1)\| \leq q\|x_2 - x_1\| = q\|T(x_1) - T(x_0)\| \leq q^2\|x_1 - x_0\|$$

$$\|T(x_{k+1}) - T(x_k)\| \leq q\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^{k+1}\|x_1 - x_0\|$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x^*) \text{ und } \lim_{k\to\infty} x_k = x^* \text{ mit } T(x^*) = x^*$$

Nullstellen und Fixpunkte

Newton-Raphson Verfahren für differenzierbare Funktionen



n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-1	1	2
1	-1.5	-0.875	5.75
2	-1.347826	-0.10068	4.4499
3	-1.3252	-0.00205	4.268
4	-1.324718	-9.24×10^{-7}	4.264634
5	-1.32471795	-1.86×10^{-13}	4.264633

n	y_n	$f(y_n)$	$f'(y_n)$
0	0.3	0.72	-0.73
1	1.29	1.88	4.03
2	0.83	0.74	1.06
3	0.13	0.86	-0.94
4	1.05	1.11	2.32
5	0.57	0.61	-0.01
6	50.3	127875	7615.5

→ GeoGebra

Nullstellen und Fixpunkte

Newton-Raphson Verfahren für differenzierbare Funktionen

Mittelwertsatz

$$f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0)$$

Nullstelle ξ: $f(\xi) = 0$

$$f(\xi) - f(x_0) = -f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0)$$

$$\xi \approx x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newton-Raphson Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

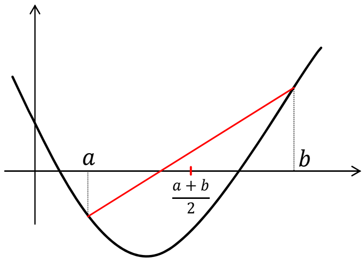
→ GeoGebra

Nullstellen und Fixpunkte

Bisektion und Regula falsi

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$.
Dann gibt es eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = 0$.



Nullstellen und Fixpunkte

Bisektion

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$.
Dann gibt es eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = 0$.

Bisektion

$$m_0 = \frac{a+b}{2}$$

$f(m_0) = 0$ dann ist m_0 die gesuchte Nullstelle

$f(m_0) < 0$ dann $m_1 = \frac{m_0+b}{2}$

$f(m_0) > 0$ dann $m_1 = \frac{a+m_0}{2}$

Nullstellen und Fixpunkte

Bisektion

Abbruchkriterium, Konvergenz

Es soll $\|m_{k+1} - m_k\| < \varepsilon$ sein

$$\|m_{k+1} - m_k\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \|a - b\| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \frac{\varepsilon}{\|a - b\|} = \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$(k+1)\log\frac{1}{2} < \log\frac{\varepsilon}{b-a} = \log(\varepsilon) - \log(b - a)$$

Also $(k+1) > \frac{\log(\varepsilon) - \log(b-a)}{\log\frac{1}{2}}$

Nullstellen und Fixpunkte

Regula falsi

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$.
Dann gibt es eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = 0$.

Regula falsi

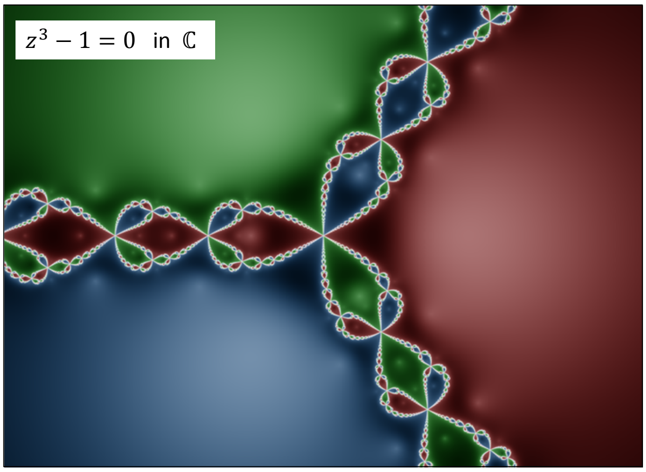
Verbinde $f(a)$ und $f(b)$ durch eine Gerade und schneide mit x-Achse.

$$x_0 = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Fahre fort analog der Bisektion.

Nullstellen und Fixpunkte

Newtonverfahren: Konvergenz



Newton-Verfahren divergent für Newton-Fraktal (weiße Struktur)

Taylorreihen

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome

Taylorpolynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$

Restglied $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \theta \in (0,1)$

es gilt $|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, falls $|f^{(n)}\xi| \leq C,\ \xi \in [x, x_0],\ \forall n$

Voraussetzung: $f(x)$ ist zumindest $n+1$-Mal differenzierbar.

Taylorreihen

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$ Taylorpolynom

Warum sehen die Koeffizienten so aus?

Die Approximation einer Funktion $f(x)$ durch ein Polynom $P_n(x)$ vom Grad n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + R_n(x)$$

Sei nun $f(x) \in P(n)$, d.h. ein Polynom vom Grad n

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ f'(x) & = & a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ f''(x) & = & 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\ f^{(3)}(x) & = & 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x) & = & n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot a_n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(0) & = & 0!\,a_0 \\ f'(0) & = & 1!\,a_1 \\ f''(0) & = & 2!\,a_2 \\ f^{(3)}(0) & = & 3!\,a_3 \\ & & \\ f^{(n)}(0) & = & n!\,a_n \end{array}$$

also $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Taylorreihen

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) & = & \dfrac{2}{(1-x)^3} \\ f'''(x) & = & \dfrac{6}{(1-x)^4} \end{array}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

Entwicklung bei $x_0 = 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Eine Taylorreihe heißt auch MacLaurin-Reihe, falls $x_0 = 0$.

Taylorreihen

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome

$$
\begin{array}{lcll}
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots & x_0 = 0 \\
\sin x & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots & x_0 = 0 \\
\cos x & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots & x_0 = 0 \\
\log(x+1) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots & x_0 = 0 \\
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots & x_0 = 0
\end{array}
$$

→ Geogebra

Taylorreihen

Rechnen mit Taylorreihen

$$
\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \cdots
$$

$$
\arctan x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\
&= \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots
\end{aligned}
$$

→ Einfaches Differenzieren und Integrieren von Funktionen

Taylorreihen

Die Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Taylorreihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

Setze $x = i\varphi$ und vergleiche die Koeffizienten.

Es folgt daraus auch

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \\ |e^{i\varphi}| &= 1 \end{aligned}$$

Interpolation

Einleitung

Im Kapitel *Interpolation, Approximation und Regression* in der Vorlesung MBT haben wir Interpolations- und Approximationsprobleme in Matrizennotation, als Projektionen, kennengelernt.
Hier nun ein kurzer Abriss des klassischen, analytischen Zugangs, d. h. mit Hilfe von Funktionen.

Interpolationsproblem

Eine Funktion ist nur an $n + 1$ Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ bekannt, d. h. wir kennen dort die Funktionswerte $f_0, f_1, \dots, f_n$.

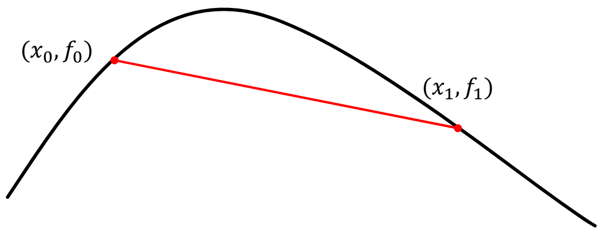
Wir interessieren uns aber auch dafür, wie die Funktion zwischen den Stützstellen, zumindest näherungsweise, aussieht.

Wir suchen also eine (möglichst einfache) Funktion f ,
die durch alle Stützstellen geht, also eine Funktion, für $f(x_i) = f_i, 0 \leq \mathrm{i} \leq n$ gilt.

Interpolation

Lineare Interpolation

Gegeben 2 Stützstellen $x_0,\ x_1$ mit Funktionswerten $f_0,\ f_1$



$$f(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}x + f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}x_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f_0$$

Interpolation

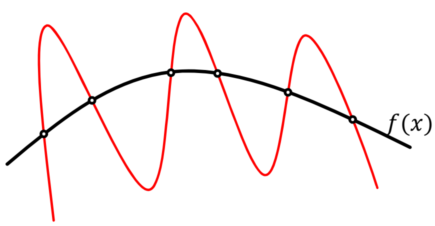
Lagrange-Interpolation

Gegeben $n + 1$ Stützstellen $(x_0, , f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Dann gibt es genau ein Polynom n-ten Grades mit $P(x_i) = f_i,\ \ 0 \leq i \leq n$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x), \text{ wobei } L_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

L_k ist das k-te Lagrangepolynom.



→ Geogebra

Interpolation

Newton-Interpolation

Gegeben $n+1$ Stützstellen $(x_0, , f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Ansatz

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

Rekursive Berechnung mittels des Schemas der d*ividierten Differenzen*

$$\begin{aligned}
i = 0: &\quad a_0 = f_0 \\
i = 1: &\quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
i = 2: &\quad a_2 = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
\vdots &\quad\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Interpolation

Hermite-Interpolation

An den Stützstellen können nicht nur Funktionswerte
sondern auch die Ableitungen gegeben sein.

Auch diese Information kann bei der Interpolation einfließen.

Wir setzen wieder ein Polynom $P(x)$ der Ordnung n an,
wenn $n+1$ Stützstellen mit Funktionswerten oder Ableitungen gegeben sind.

Beispiel

Gegeben seien folgende 4 Werte:
An der Stelle $x_0 = 0: f(0) = 1, f'(0) = -1, f''(0) = 2$ und
an der Stelle $x_1 = 1$ der Funktionswert $f(1) = 2$.

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\
P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \\
P''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & & & & & & & = & 1 \\
 & & a_1 & & & & & = & -1 \\
 & & & & 2a_2 & & & = & 2 \\
a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 2
\end{array}$$

$$P(x) = 1 - x + x^2 + x^3$$

Approximation

Approximationsproblem

Eine gegebene Funktion $f(x)$ soll durch eine (möglichst einfache) Funktion $g(x)$ so „angenähert" werden, dass etwa der *Abstand* zwischen *f* und *g* minimal wird.

Bei der Interpolation sind auch große Abweichungen zwischen den Stützstellen möglich, an den Stützstellen selbst ist die Übereinstimmung aber exakt.

Bei der Approximation hingegen sind nur kleine Abweichungen möglich,
Aber eventuell gibt es an keiner Stützstelle eine exakte Übereinstimmung.

Für die Implementation und für Verfahren siehe MBT.

Numerisches Differenzieren

Bei der numerischen Differentiation können wir die Funktion an den Stützstellen durch ein Polynom interpolieren und dieses dann differenzieren.

Eine andere Möglichkeit : Über die Definition des Differentialquotienten.

Wir berechnen an jeder Stützstelle x_i den Differenzenquotienten zu $x_i - h$ und führen den Grenzübergang $h \to 0$ durch,
d. h. wir lassen h kleiner werden, bis eine gewisse Genauigkeit erreicht ist.

Numerisches Integrieren

Problemstellung

Berechne das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise.

Newton-Côtes Formeln

Wir interpolieren die Funktion an Stützstellen. Dazu wählen wir $n+1$ Stützstellen $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$, ermitteln das Lagrange-Interpolationspolynom $P(x)$ und berechnen das Integral $\int_a^b P(x)\,dx$.

Im Allgemeinen werden die Stützstellen äquidistant gewählt:

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k,\ 0 \leq k \leq n,\ \text{mit der Schrittweite } h = \frac{b-a}{n}.$$

Numerisches Integrieren

Newton-Côtes Formeln

Sehnentrapezregel, Sehnenregel oder Trapezregel

$$S = \int_a^b P(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(Trapezfläche)

lineare Interpolation

Zusammengesetzte Sehnentrapezregel

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(y_k) - f(y_{k-1})}{2} \cdot h$$

$$= \frac{b-a}{2m} \cdot [f(y_0) + 2f(y_1) + \cdots + 2f(y_{m-1}) + f(y_m)]$$

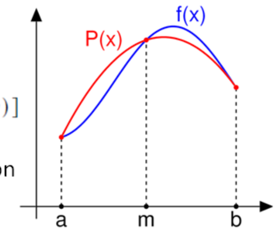
Numerisches Integrieren

Newton-Côtes Formeln

Keplerregel, Simpsonregel oder Fassregel

$$K = \int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

quadratische Interpolation



Zusammengesetzte Keplerregel

$$K = \frac{b-a}{6m} \cdot [f(y_0) \quad \begin{aligned} &+4f(y_1) + 2f(y_2) \quad + \\ &+4f(y_3) + 2f(y_4) \quad + \\ &\quad\vdots \\ &+4f(y_{2m-1}) \qquad + \quad f(y_{2m})] \end{aligned}$$