GMA

Grundlagen Mathematik und Analysis

Kurven

Christian Cenker
Gabriele Uchida

Data Analytics and Computing

Kurven

Definitionen

Kurven „sind“ einfache mehrdimensionale Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^t$$

Definition

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t)$ heißt *Weg*.

$f(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $f(b)$ heißt *Endpunkt*.

Falls $f(a) = f(b)$, heißt der Weg *geschlossener Weg*.

Kurven

Spur

Definition

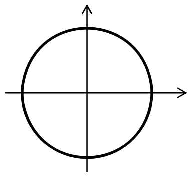
Weg $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto f(t)$

Die Menge $\{f(t) \mid t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Spur*.

Beispiel

Die zwei folgenden Wege f_1 und f_2 haben dieselbe Spur.

$$\begin{aligned} f_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(t) &= (\cos t, \sin t) \\ f_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f_2(t) &= (\cos 2t, \sin 2t) \end{aligned}$$



f_1 durchläuft die Spur einmal, f_2 zweimal.

Ist die Funktion $f(t)$ ein Weg,
so ist ihr Graph die Spur des Weges $F : t \mapsto (t, f(t))$

Kurven

Wege und Kurven

Betrachten wir die Wege

$$\begin{aligned} f_1 : [0,\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(t) &= (\sin t, \cos t) \\ f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad f_2(u) &= (u, \sqrt{1-u^2}) \end{aligned}$$

so beobachten wir, dass diese Wege gleich sind.

Die Parametertransformation $u = \sin t$ führt f_1 in f_2 über.

Definition

Zwei Wege $f_1 : [a,b] = I_1 \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto f_1(t)$
$f_2 : [c,d] = I_2 \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto f_2(t)$

heißen *äquivalent*, wenn es eine stetige, streng monoton wachsende Parametertransformation $w : [a,b] \to [c,d],\ t \mapsto t' = w(t)$ gibt,

sodass $f_2(w(t)) = f_1(t),\ \forall t \in [a,b]$

bzw. $f_2(t') = f_1(w^{-1}(t')),\ \forall t' \in [c,d]$

Kurven

Wege und Kurven

Die letzte Definition beschreibt eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege, d. h. eine Relation zwischen Wegen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wir erhalten daher eine Klasseneinteilung der Wege in (paarweise disjunkte) Klassen.

Definition

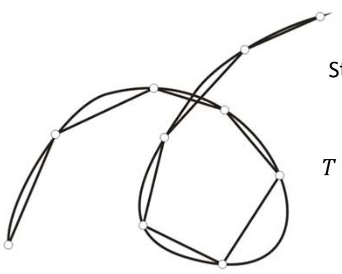
Eine Äquivalenzklasse von Wegen heißt *stetige Kurve* $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$.

Eine Kurve besitzt unterschiedliche, äquivalente Parameterdarstellungen.

Kurven

Die Länge einer Kurve

Wir unterteilen eine Kurve in Abschnitte und approximieren die Länge der Kurve durch Streckenabschnitte.
Wir verkürzen dann die Abschnitte immer mehr.



Streckenabschnitte

$V_T(f) = \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$

T ist die Unterteilung des Intervalls in $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Existiert eine differenzierbare Parameterdarstellung $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ so gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})|^2 = (x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2$$

und nach dem Mittelwertsatz

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig und differenzierbar } \Rightarrow \exists \zeta \in [a,b] : f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sqrt{(x'(\zeta_1))^2 + (y'(\zeta_2))^2} \cdot (t_k - t_{k-1})$$

Verkleinern wir die Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ stetig, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= V_{[a,b]}(f) = \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &= \textstyle\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \end{aligned}$$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Theorem

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ eine stetig differenzierbare Kurve, so ist ihre Länge gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + \cdots + (f_n'(t))^2}\, dt$$

Theorem

Der Graph $G_f : t \mapsto (t, f(t))$ hat die Länge $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$

$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi \mapsto r(\varphi)$

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Theorem

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten gegeben

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi \mapsto r(\varphi)$$

so ist ihre Länge

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Beweisidee

$$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$$

Es gilt $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$ und $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$$

$$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

$$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2$$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Beispiel (Kreis)

Der Kreis mit Radius R hat die Parameterdarstellung

$$r(\varphi) \equiv R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

und es gilt somit für den Umfang U

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2}\, d\varphi = 2\pi R$$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Beispiel (Ellipse)

Die Ellipse mit der Hauptachsenlänge $2a$ und der Nebenachsenlänge $2b$ hat die Parameterdarstellung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \mapsto (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$$

Für den Umfang gilt

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\cos^2\varphi}\, d\varphi \end{aligned}$$

$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ist die sogenannte *Exzentrizität*

Da die Ellipse symmetrisch ist, gilt $U = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\cos^2\varphi}\, d\varphi$

$$E(k) \doteq \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

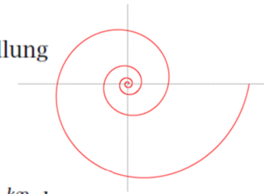
heißt *vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung*.
Es lässt sich nicht mit Hilfe elementarer Funktionen ausdrücken, sondern nur näherungsweise berechnen.

Kurven

Die Länge einer Kurve

Beispiel (Logarithmische Spirale)

Die logarithmische Spirale hat die Parameterdarstellung



$$\gamma : r(\varphi) = e^{k\varphi}, \quad k > 0$$

Die Länge eines Spiralabschnittes ist

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{e^{2k\varphi} + k^2 e^{2k\varphi}}\, d\varphi &= \sqrt{1 + k^2} \int_\alpha^\beta e^{k\varphi}\, d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(r(\beta) - r(\alpha)) \end{aligned}$$

und ist somit proportional zum Zuwachs der Kurve zwischen Anfangs- und Endpunkt des Abschnittes.

Der innere Abschnitt der Spirale hat endliche Länge, denn es ist

$$L(-\infty, 0) = \lim_{\alpha \to -\infty} L(\alpha, 0) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$$

Kurven

Die Länge einer Kurve

Beispiel (Zykloiden)

Rollt ein Kreis vom Radius 1 entlang der x-Achse ab und ist an diesem im Abstand R ein Punkt „befestigt", so beschreibt dieser eine *Zykloide*. Diese hat die Parameterdarstellung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \mapsto (1 - R\sin\varphi, 1 - R\cos\varphi)$$

Die Länge für eine Umdrehung ist

$$L_R = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2R\cos\varphi + R^2}\, d\varphi$$

Ersetzen wir $\varphi = \pi + 2t$, so erhalten wir das elliptische Integral

$$L_R = 4(1+R)\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4R}{(1+R)^2}\sin^2 t}\, dt = 4(1+R)\, E(\frac{2\sqrt{R}}{1+R})$$

Ist $R = 1$, d. h. liegt der Punkt am Umfang des rollenden Kreises, so erhalten wir die Länge für einen Umlauf

$$L_1 = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 8$$

Kurven

Tangentialvektoren an eine Kurve

Definition

Es sei $f : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve γ.

Der Vektor $\quad e(t_0) = \dfrac{\nabla f(t_0)}{|\nabla f(t_0)|}$

heißt *Tangenteneinheitsvektor* oder *Tangentialvektor* der Kurve γ im Punkt t_0.

Die Gerade $\quad \tau : \tau(t) = f(t_0) + t \cdot e(t_0),\ t \in \mathbb{R}$

heißt *Tangente* an die Kurve im Punkt t_0.

Die Tangente bzw. der Tangentialvektor dreht sich stetig um die Kurve, wenn wir entlang der Kurve gehen. Eine solche Kurve heißt daher *glatt*.