1. Übungsblatt

3.0 VU Formale Modellierung

Lara Spendier, Gernot Salzer

18. März 2012

Allgemeines

Dieses Übungsblatt enthält Aufgaben zur Aussagenlogik sowie zum ersten Teil der Automatentheorie. Bitte beachten Sie:

- Lösen Sie die Beispiele selbständig. Wir weisen Sie darauf hin, dass **Plagiate** mit **null Punkten** beurteilt werden. Ein Plagiat entsteht sowohl dann, wenn Sie abschreiben, als auch dann, wenn Sie abschreiben lassen. Wir ermitteln nicht, wer von wem abgeschrieben hat.
- Geben Sie Ihre Lösung als **ein einziges PDF-Dokument** in TUWEL ab.
- Beachten Sie die **Abgabefrist** (siehe unten)!
- Gönnen Sie sich einen **Zeitpuffer**, d.h., warten Sie nicht bis zum letzten Augenblick mit dem Hochladen der Lösungen. Mögliche Probleme in letzter Sekunde (aus dem letzten Semester):
  - Wie erzeuge ich eine PDF-Datei aus meinem Word-Dokument oder aus meinen Zetteln?
  - Wie bekomme ich alle Seiten in eine einzige PDF-Datei?
  - Das Internet/TUWEL/der Computer funktioniert plötzlich nicht.
  - Eine falsche Datei wird hochgeladen oder die richtige unvollständig, und es ist keine Zeit mehr für eine Wiederholung.
  - Übelkeit
- Verständigen Sie uns im Falle eines Notfalls ehestmöglich per E-Mail an

  `fmod12s@logic.at` .

  In der Regel erwarten wir einen Nachweis des Notfalls (etwa ärztliche Bestätigung im Fall einer Erkrankung).

Abgabegespräch

- Sie müssen sich über TUWEL zum Abgabegespräch anmelden. Bitte machen Sie das rechtzeitig (Termine siehe unten); je später Sie sich anmelden, desto eingeschränkter ist die Terminauswahl.
- Sie müssen mit dem Übungsblatt mindestens 1 (von 5) Punkten erzielen. Wenn Sie weniger als 1 Punkt erhalten oder kein Blatt abgeben, können Sie nicht am Abgabegespräch und der weiteren Lehrveranstaltung teilnehmen und erhalten ein negatives Zeugnis.
- Kommen Sie zu der von Ihnen reservierten Zeit **pünktlich** mit einem amtlichen Lichtbildausweis oder Ihrem Studierendenausweis zum in TUWEL angegebenen Ort, um das Abgabegespräch zu absolvieren. Stoffgebiet des Abgabegesprächs sind die mit dem Übungsblatt abgedeckten Themengebiete. Wir setzen voraus, dass Sie sich mit Ihrer korrigierten Abgabe auseinandergesetzt haben, die wir Ihnen vor dem Abgabegespräch per E-Mail an Ihre `exxxxxxx@student.tuwien.ac.at`-Adresse zuschicken.
- Sie absolvieren Ihr Abgabegespräch gemeinsam mit anderen KollegInnen. Das Gespräch dauert etwa 60 Minuten. Sie können dabei bis zu 10 Punkte erreichen.
- Um die Lehrveranstaltung positiv abzuschließen, müssen Sie mindestens 1 Punkt auf das Übungsblatt und 1 Punkt beim Abgabegespräch erzielen. Beim Übungsblatt wird primär der Lösungsversuch gewertet, Fehler führen zu keinen oder geringen Punkteabzügen. Beim Abgabegespräch kommt es auf das Stoffverständnis an, Fehler führen zu Abzügen.
- Falls Sie ohne triftigen Grund zu Ihrem Gesprächstermin nicht erscheinen, erhalten Sie 0 Punkte und damit ein negatives Zeugnis.

Wichtige Termine

26.3. 06:55 Uhr	Späteste Abgabe der Lösungen via TUWEL
30.3. 12:00 Uhr	Beginn der Anmeldung zu den Abgabegesprächen in TUWEL
11.4. 12:00 Uhr	Aussendung der korrigierten Abgaben
16.–20.4.2012	Abgabegespräche

Aufgaben

Aufgabe 0 (0 Punkte) Absolvieren Sie den Multiple-Choice-Test zum Thema „Syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln“ in TUWEL. (Diese Aufgabe ist nicht verpflichtend und wird nicht bewertet.)

Aufgabe 1 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{implies}, \mathsf{false}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{implies}\}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2 (0.4 Punkte) Arithmetische Ausdrücke bestehen aus Variablen, Zahlen und Operatoren wie Plus/Minus (unär und binär) oder Mal. Definieren Sie die Syntax und Semantik arithmetischer Ausdrücke analog jener der Aussagenlogik. Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck mit mindestens zwei Operatoren und zwei Variablen an und zeigen Sie, dass er syntaktisch korrekt ist. Bestimmen Sie seinen Wert in einer Variablenbelegung Ihrer Wahl.

Aufgabe 3 (0.4 Punkte) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik.

(a) Max geht in die Disco, wenn er keine Mathematik-Prüfung hat.

(b) Wenn Max eine Mathematik-Prüfung hat und in die Disco geht, besteht er die Mathematik-Prüfung nicht.

(c) Es ist nie der Fall, dass Max gleichzeitig in die Disco geht und Mathematik lernt.

Verwenden Sie dazu folgende Aussagenvariablen mit der angegebenen Bedeutung.

A ... Max besteht die Mathematik-Prüfung.
B ... Max hat eine Mathematik-Prüfung.
C ... Max lernt Mathematik.
D ... Max geht in die Disco.

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob der Wahrheitswert Ihrer Formeln in allen Interpretationen jenem des Satzes entspricht.

Aufgabe 4 (0.3 Punkte) Formulieren Sie die nachfolgenden aussagenlogischen Formeln als deutsche Sätze und geben Sie für jede der Formeln sowohl eine erfüllende als auch eine widerlegende Interpretation an.

(a) $\neg C \supset (A \wedge B)$

(b) $D \equiv (B \wedge C)$

(c) $C \not\equiv (\neg D \wedge A)$

Die Aussagenvariablen haben dabei folgende Bedeutung:

A ... Popeye isst Spinat.
B ... Popeye verprügelt Bösewichte.
C ... Olivia himmelt Popeye an.
D ... Popeye ist zufrieden.

Aufgabe 5 (0.4 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen sowohl semantisch mittels Wahrheitstafel als auch algebraisch durch Umformung.

(a) Die Formeln $\neg((A \vee \neg B) \vee (C \wedge (A \vee \neg B)))$ und $\neg A \wedge B$ sind äquivalent.

(b) Die Formel $((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$ ist gültig.

Aufgabe 6 (0.4 Punkte) Welche der folgenden Konsequenzbeziehungen treffen zu? Weisen Sie die Gültigkeit semantisch durch Analyse aller Wahrheitsbelegungen nach bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls keine logische Konsequenz vorliegt.

(a) $B \supset A, A \wedge B \models \neg A$

(b) $A \supset (\neg B \vee A), \neg B \equiv A \models A \not\equiv B$

Aufgabe 7 (0.4 Punkte) Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln äquivalente Formeln in disjunktiver und konjunktiver Normalform an. Verwenden Sie jeweils sowohl die semantische als auch die algebraische Methode. Weisen Sie in Ihrer Antwort explizit darauf hin, welche Formel in DNF und welche in KNF ist.

(a) $\neg(A \wedge C) \wedge (\neg B \vee (A \wedge C))$

(b) $C \supset ((A \supset (B \wedge C)) \wedge (A \vee B))$

Aufgabe 8 (0.4 Punkte) Die Telekom stattet die Herren Faymann, Spindelegger und Strache mit neuen Dienstwägen aus. (Glawischnig will lieber ein Fahrrad.) Zur Wahl stehen Autos der Marken Mercedes und BMW, jeder Politiker bekommt genau einen neuen Wagen.

1. Wenn Faymann einen Mercedes nimmt, will Strache auch einen.
2. Entweder Spindelegger oder Strache wählt einen BMW (aber nicht beide).
3. Allerdings wollen Strache oder Faymann einen BMW.
4. Faymann und Spindelegger wollen auf keinen Fall dasselbe Auto.

(a) Drücken Sie die beschriebene Situation inklusive der Einschränkungen durch aussagenlogische Formeln aus. Geben Sie dabei für jede Aussagenvariable an, was sie bedeuten soll.

(b) Kann die Telekom alle Wünsche erfüllen? Wenn ja, welcher Politiker bekommt welches Auto? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der aussagenlogischen Modellierung aus dem vorigen Punkt.

Aufgabe 9 (0.4 Punkte) Modellieren Sie die folgende Situation mit Hilfe der Aussagenlogik:

> Wenn die Systemsoftware aktualisiert wird, können die Benutzer nicht auf das Dateisystem zugreifen. Wenn Benutzer auf das Dateisystem zugreifen können, dann können sie neue Dateien speichern. Wenn Benutzer keine neuen Dateien abspeichern können, dann wird das System nicht aktualisiert.

Ist die Situationsbeschreibung konsistent, d.h., nicht unerfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 10 (0.4 Punkte) Entwerfen Sie einen endlichen Automaten für den organisatorischen Ablauf der Lehrveranstaltung „Formale Modellierung". Berücksichtigen Sie dabei die folgenden Aspekte.

> Ein Student beginnt die Lehrveranstaltung, indem er einen Eingangstest absolviert. Danach löst er das erste Übungsblatt und nimmt am ersten Abgabegespräch teil. In weiterer Folge gibt er das zweite Übungsblatt ab und absolviert ein zweites Abgabegspräch. Wenn der Student ein Übungsblatt oder ein Abgabegespräch nicht erfolgreich absolviert, bekommt er ein negatives LV-Zeugnis und die LV ist damit für ihn beendet. Wenn der Student alle Übungsblätter und Abgabegespräche erfolgreich absolviert hat, darf er am Abschlusstest teilnehmen. Absolviert er den Abschlusstest erfolgreich, bekommt er ein positives Zeugnis und die Lehrveranstaltung ist für ihn beendet; zwecks Notenverbesserung darf er noch genau ein weiteres Mal antreten, sofern es noch nicht sein drittes Zeugnis war. Ist der Abschlusstest negativ, kann er den Test höchstens zweimal wiederholen. Nach dem dritten Antritt ist die Lehrveranstaltung auf jeden Fall für ihn beendet. Insgesamt stehen vier Termine für den Abschlusstest zur Verfügung, von denen ein bis drei genützt werden können.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen *Zuständen* und *Zustandsübergängen.*

Aufgabe 11 (0.3 Punkte) Neben dem Universitätsgebäude befindet sich ein Bankomat, der 10-, 20-, 50- und 100-Euro-Scheine enthält. Maria möchte 70 Euro abheben. Konstruieren Sie einen deterministischen, endlichen Automaten, der die Geldausgabe an Maria durch diesen Bankomaten darstellt.

Aufgabe 12 (0.4 Punkte) Geben Sie endliche Automaten für folgende Sprachen L an.

(a) $L = \{\, w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid (n_{\mathtt{a}}(w) + 2n_{\mathtt{b}}(w)) \bmod 3 < 2 \,\}$
($n_x(w)$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommnisse des Zeichens x im Wort w.)

L ist also die Menge jener Wörter bestehend aus `a`s und `b`s, bei denen die Anzahl der `a`s plus der doppelten Anzahl der `b`s bei Division durch 3 den Rest 0 oder 1 liefert. Beispiele für solche Wörter sind `aabba`, da $(3 + 2 \cdot 2) \bmod 3 = 7 \bmod 3 = 1 < 2$, und `bababbb`, da $(2 + 2 \cdot 5) \bmod 3 = 12 \bmod 3 = 0 < 2$. Das Wort `aabbaa` ist hingegen nicht in der Sprache, da $(4 + 2 \cdot 2) \bmod 3 = 8 \bmod 3 = 2 \not< 2$.

(b) $L = \{ w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^+ \mid \text{Binärzahl } w \text{ ist durch 5 teilbar} \}$

Beispiele für Wörter in der Sprache sind `00`, `101` und `001010`, da die Zahlen 0, 5 und 10 durch 5 teilbar sind.

(c) $L = \{ w \in \{\texttt{a}, \texttt{k}, \texttt{l}, \texttt{m}, \texttt{r}\}^* \mid w \text{ enthält als Teilwort } \texttt{arm}, \texttt{klara} \text{ oder } \texttt{ara} \}$

Aufgabe 13 (0.4 Punkte) Geben Sie sowohl einen Mealy- als auch einen Moore-Automaten über den Alphabeten $\Sigma = \Gamma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ zur Berechnung folgender Funktionen an.

(a) *1-Bit-Buffer:* Die Ausgabe entspricht der um ein Bit verzögerten Eingabe; die Ausgabe beginnt mit dem Symbol `0`.

Beispiel: Die Eingabe `1011`... führt zur Ausgabe `01011`....

(b) *2-Bit-Buffer:* Die Ausgabe entspricht der um zwei Bits verzögerten Eingabe; die Ausgabe beginnt mit den Symbolen `00`.

Beispiel: Die Eingabe `1011`... wird zu `001011`....

Wieviele Zustände benötigt ein Mealy- bzw. Moore-Automat für einen n-Bit-Buffer?