Prüfungsbeispiel 05

1) Über die Zeit X (in Stunden), die ein Techniker benötigt, um eine Maschine zu reparieren, ist bekannt, dass diese einer Exponentialverteilung $\lambda = 2$ unterliegt, d. h. X besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

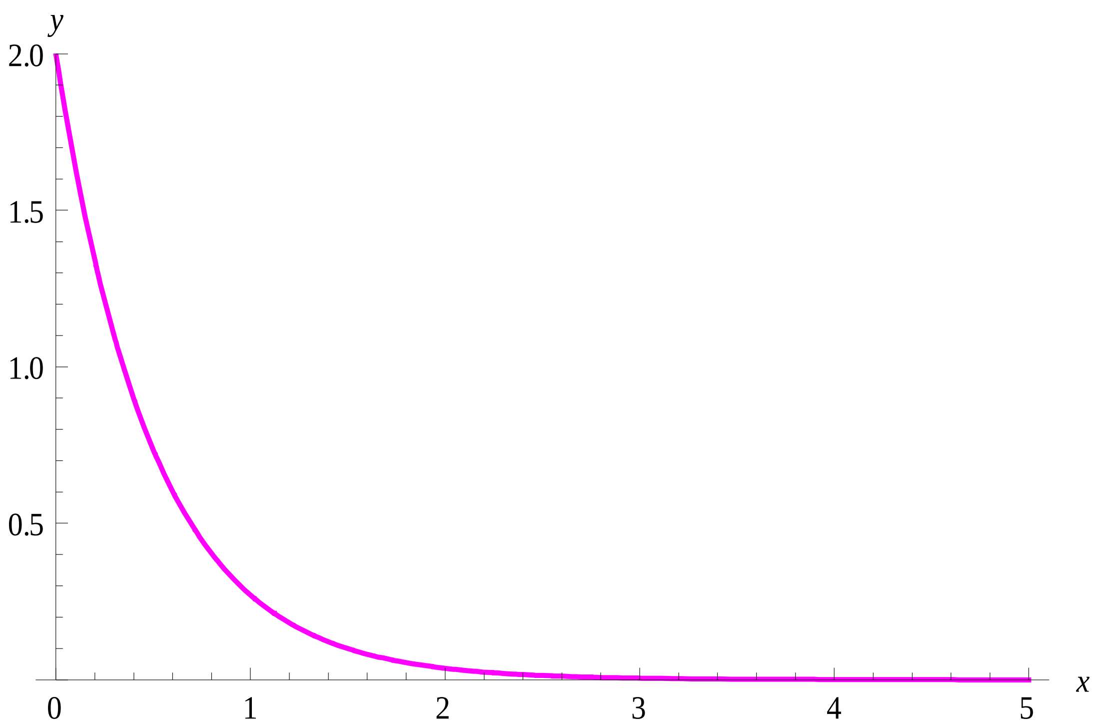
a) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F und stellen Sie diese sowie die Dichte grafisch dar.

$$F(x) = \int_0^x 2 \cdot e^{-2t} dt = 2\int_0^x e^{-2t} dt = 2 \cdot \frac{1}{-2} e^{-2t} \Big|_0^x = -e^{-2t} \Big|_0^x =$$

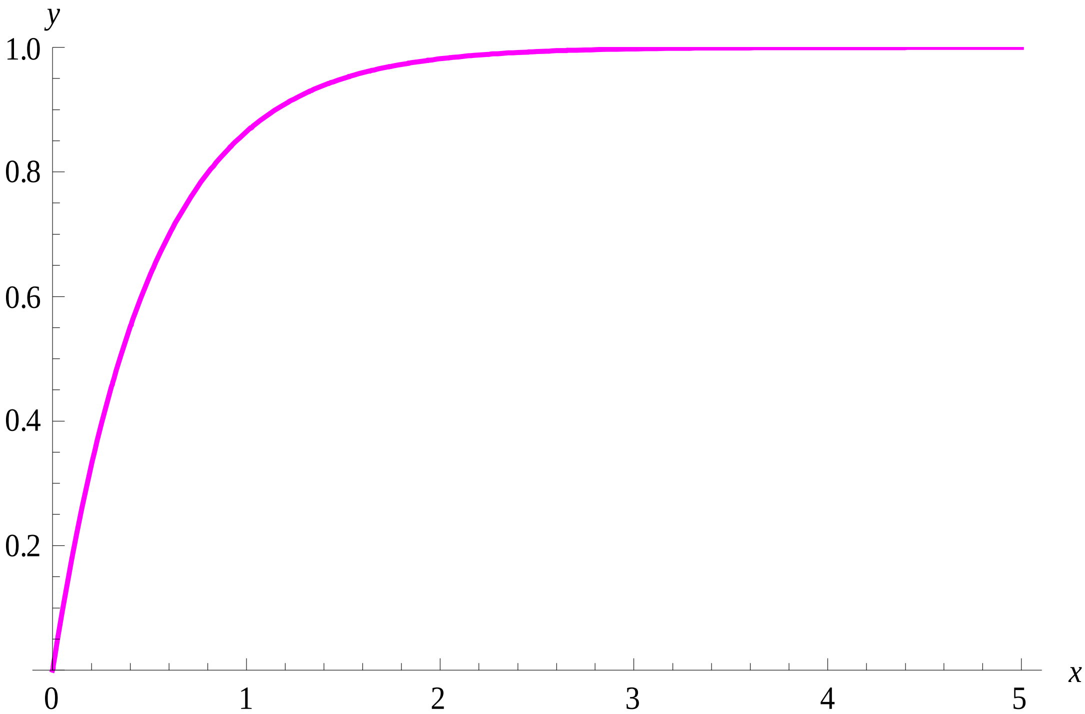
$$-e^{-2x} - (-e^0) = 1 - e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{F(x) = 1 - e^{-2x}}}$$

Grafische Darstellung der Dichtefunktion f(x):



Grafische Darstellung der Verteilungsfunktion F(x):



b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Techniker

(i) zwischen 0,25 und 0,41 Stunden

$$P(0{,}25 \le X \le= 0{,}41) = F(0{,}41) - F(0{,}25)$$
$$P = 1 - e^{-2\cdot 0{,}41} - (1 - e^{-2\cdot 0{,}25}) = e^{-0{,}5} - e^{-0{,}82} = 0{,}606 - 0{,}440 = 0{,}166$$
$$\underline{\underline{P = 0{,}166}}$$

(ii) mehr als 16 Minuten für die Reparatur aufwenden muss?

$$P(X \le 16\,\text{min}) = 1 - F(\frac{16}{60})$$
$$P = 1 - (1 - e^{-2\cdot 0{,}2666}) = e^{-0{,}5333} = 0{,}586$$
$$\underline{\underline{P = 0{,}586}}$$

c) Wieviele Stunden werden durchschnittlich für die Reparatur einer Maschine benötigt?
Bestimmen Sie außerdem die Varianz der Reparaturzeit.
(Rechenweg unbedigt anfügen):

$$E(x)=\int_0^\infty x\cdot f(x)dx=\int_0^\infty x\cdot 2\cdot e^{-2x}dx=2\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx$$

$$\int u\cdot dv=uv-\int vdu$$

$$u=x$$

$$du=dx$$

$$dv=e^{-2x}dx$$

$$v=\frac{1}{-2}e^{-2x}$$

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx`=-\frac{x\cdot e^{-2x}}{2}\bigg|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{e^{-2x}}{2}dx$$

$$2\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx`=-x\cdot e^{-2x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{x}{e^{2x}}\bigg|_0^\infty-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\bigg|_0^\infty=(0+0)-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}$$

Der Techniker benötigt im Durchschnitt eine halbe Stunde, um eine Maschine zu reparieren.

<u>Varianz:</u>

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\cdot f(x)dx=2\cdot\int_0^\infty x^2\cdot e^{-2x}dx$$

$$\int u\cdot dv=uv-\int vdu$$

$$u=x^2$$

$$du=2xdx$$

$$dv=e^{-2x}$$

$$v=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}$$

$$2\cdot\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx=2\cdot[x^2\cdot(-0{,}5)\cdot e^{-2x}]\Big|_0^\infty-2\cdot\int_0^\infty 2x(-0{,}5)\cdot e^{-2x}dx=(0-0)+\underbrace{\int_0^\infty 2xe^{-2x}dx}_{E(X)=\frac{1}{2}}$$

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Die Varianz der Zeit, die zur Reparatur aufgewendet wird liegt bei 0,25 Stunden.