3. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

12. November 2014

1. In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, die Randverteilungen und ihre Erwartungswerte.

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 \qquad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \binom{3}{x}\binom{3}{y}\binom{3}{3-x-y}$$

X/Y	0	1	2	3	Rv Y
0	1/84	9/84	9/84	1/84	20/84
1	9/84	27/84	9/84	0	45/84
2	9/84	9/84	0	0	18/84
3	1/84	0	0	0	1/84
Rv X	20/84	45/84	18/84	1/84	

$$\mathbb{E}(x) = 0 \cdot \frac{20}{84} + 1 \cdot \frac{45}{84} + 2 \cdot \frac{18}{84} + 3 \cdot \frac{1}{84} = 1$$

$$\mathbb{E}(y) = 0 \cdot \frac{20}{84} + 1 \cdot \frac{45}{84} + 2 \cdot \frac{18}{84} + 3 \cdot \frac{1}{84} = 1$$

2. Die gemeinsame Dichte von X und Y ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} cx/y & \text{für } 0 < x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie c, die Randdichten und Erwartungswerte (hier kann es vorteilhaft sein, $\mathbb{E}(X)$ mithilfe des Satzes vom unachtsamen Statistiker als $\int\int x \cdot f(x,y)$ zu berechnen).

- c berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^y \frac{cx}{y}\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\frac{cx^2}{2y}\right)\Big|_0^y\ dy = \int_0^1 \frac{cy}{2}\ dy = \left(\frac{cy^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{4}$$

$$\frac{c}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x/y & \text{für } 0 < x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Randdichte $f_X(x)$ berechnen:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_x^1 4\frac{x}{y}\ dy = 4x(\ln|1| - \ln|x|) = -4x\ln|x| = \begin{cases} -4x\ln|x| & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Randdichte $f_Y(y)$ berechnen:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx = \int_0^y 4\frac{x}{y}\ dx = \frac{2y^2}{y} = 2y = \begin{cases} 2y & \text{für } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Erwartungswerte:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\ dx = \int_0^1 x(-4x\ln|x|)\ dx = -4\int_0^1 x^2\ln|x|\ dx = \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\ dy = \int_0^1 y \cdot (2y)\ dy = \left(\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

3. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die bedingten Erwartungswerte $E(Y|X=x)$ und $E(X|Y=y)$.
   Bedingte Dichte $f_{Y/X}(Y|X=x)$:

$$f_{Y/X}(Y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{4x}{y}}{-4x\ln|x|} = -\frac{1}{y\ln|x|}$$

   Erwartungswert $\mathbb{E}(Y, X=x)$:

$$\mathbb{E}(Y, X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(Y, X=x)\ dy = -\int_x^1 \frac{1}{\ln|x|}\ dy = \left(-\frac{y}{\ln|x|}\right)\Big|_x^1 = \frac{x-1}{\ln|x|}$$

   Bedingte Dichte $f_{X/Y}(X|Y=y)$:

$$f_{X/Y}(X|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{4x}{y}}{2y} = \frac{4x}{2y^2}$$

   Erwartungswert $\mathbb{E}(X, Y=y)$:

$$\mathbb{E}(X, Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X/Y}(X, Y=y)\ dx = \int_0^y \frac{4x^2}{2y^2}\ dx = \left(\frac{4x^3}{6y^2}\right)\Big|_0^y = \frac{2}{3}y$$

4. Die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

   gegeben. Bestimmen Sie ihren Erwartungswert.

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{\text{Reihenentw.} e^{\lambda}} = \lambda$$

5. Bestimmen Sie den Erwartungswert der diskreten Gleichverteilung

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a+1}, \quad x = a, a+1, \ldots, b$$

   und den Erwartungswert von X^2

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=a}^{b} k \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{k=1}^{b} k - \sum_{k=1}^{a-1} k\right) = \frac{1}{b-a+1}\frac{(b-a+1)(a+b)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=a}^{b} k^2 \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} k^2 = \frac{1}{b-a+1}\frac{(b-a+1)(2a^2+2ab+2b^2-a+b)}{6} = \frac{2a^2+2ab+2b^2-a+b}{6}$$

6. X hat die Dichte $f(x) = xe^{-x} \quad (x \geq 0)$. Überprüfen Sie, dass f eine Dichte ist, und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

   - Prüfen, ob Dichte:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\ dx = \left(-xe^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} - \left(\int e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} = \left(e^{-x}(-1-x)\right)\Big|_0^{\infty} = 1$$

   - Erwartungswert:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\ dx = \left(-e^{-x}(x^2+2x+2)\right)\Big|_0^{\infty} = 2$$

- Verteilungsfunktion:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ dx = \left(-xe^{-x}\right)\Big|_0^x - \left(\int e^{-x}\right)\Big|_0^x = \left(e^{-x}(-1-x)\right)\Big|_0^x = e^{-x}(-1-x) - 1$$

7. $X_1, \ldots, X_n$ seine unabhängig mit der Verteilungsfunktion F_X, $U = max(X_1, \ldots, X_n)$ und $V = min(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie:

$$F_V(x) = F_X(x)^n, \quad F_V(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Bestimmen Sie ddie Erwartungswerte von U und V, wenn die X_i auf $[0, 1]$ stetig gleichverteilt sind.

Maximum:

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U < x) = \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, \ldots X_n < x) = \mathbb{P}(X_1 < x)^n$$

$$F_U(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f_U(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^1 n \cdot x^{n-1}\ dx = \int_0^1 n \cdot x^n\ dx = \left(\frac{n \cdot x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

Minimum:

$$\mathbb{P}(V > x) = 1 - F_V(x) = 1 - \mathbb{P}(V < x) = \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \ldots X_n > x) = \mathbb{P}(X_1 > x)^n = (1 - \mathbb{P}(X_1 < x))^n$$

$$F_V(x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 < x))^n$$

$$F_V(x) = 1 - (1 - x)^n \quad \Rightarrow \quad f_V(x) = n \cdot (1 - x)^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^1 n \cdot (1 - x)^{n-1}\ dx = \left(-\frac{(1-x)^n(nx+1)}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$