Runde 8, Beispiel 55

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 14.12.2006

1 Angabe

Zeige, dass eine gerade T-periodische Funktion ($f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung (= Sinus-Cosinus-Form) keine Sinus-Ausdrücke enthalten kann.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (T- bzw. L-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode $2L$ und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x, \end{aligned}$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

In unserem Beispiel ist die Periode T bzw. L (Unterschied ist nur in den Integrationsgrenzen).
Wenn bei $f(t) = f(-t)$ keine Sinus-Ausdrücke enthalten soll, so muss der Fourier-Koeffizient $b_n = 0$ sein. Somit können wir schrieben:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{2}{T}\int_0^T f(-t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$$

Weil $f(t) = f(-t)$ ist und $\sin(-nt) = -\sin(nt)$ ist, können wir schreiben und weiter ausführen (Durch die Umformung des Sinus-Terms und die Indexveschiebung von $f(t) = f(-t)$ ersetzen):

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\frac{4}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = 0 = b_n \qquad \surd$$