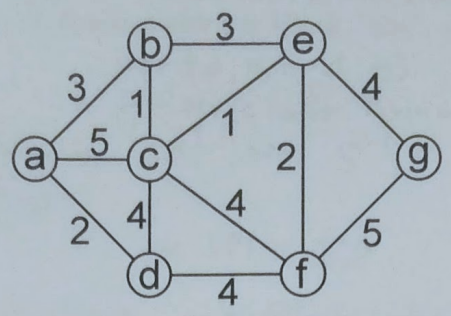
8 (1) [8 Punkte] Gegeben sei der folgende kantenbewertete Graph G:



Man bestimme für G mit dem **Algorithmus von Dijkstra** die kürzesten Wege und ihre Längen vom Knoten a zu allen Knoten im Graphen. Fügen Sie dazu bitte die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in nachfolgend angeführte Tabelle ein. Weiters veranschauliche man den **Entfernungsbaum** (= Abstandsgraph) bzgl. a in einem eigenen Graphen.

Iteration	a	b	c	d	e	f	g	ausgewählter Knoten	Vorgänger
Initialisierung: 0	$\boxed{0}$	~~8~~ ∞	~~8~~ ∞	~~8~~ ∞	∞	∞	∞	a	/
1		3	5	$\boxed{2}$	∞	∞	∞	d	a
2		$\boxed{3}$	5		∞	6	∞	b	a
3			$\boxed{4}$		6	6	∞	c	b
4					$\boxed{5}$	6	∞	e	c
5						$\boxed{6}$	9	f	d
6							$\boxed{9}$	g	e

Längen der Wege:

a -> b : 3

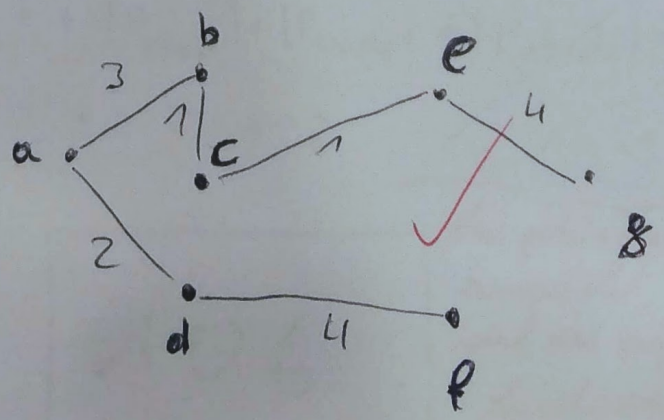
a -> b -> c : ~~a -> c~~ : 4

a -> d : ~~a -> b -> d~~ : 2

a -> e : a -> b -> c -> e : 5

a -> g : a -> b -> c -> e -> g : 9

a -> f : a -> d -> f : 6



7

(2) [8 Punkte] Man bestimme mit Hilfe einer in der Vorlesung kennengelernten kombinatorischen Methode (kein "Herumprobieren") die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben a, b, c, d, e, in denen weder der Block "abc", noch der Block "bcd", noch der Block "cde" vorkommt.

$M = \{a, b, c, d, e\}$ $|M| = 5$

P = Menge aller Permutationen

Permutation von Elementen: $n! \rightarrow 5! = \underline{\underline{120}}$

gesamt ohne Einschränkungen

$\Rightarrow |P| = \underline{120}$

- P_{abc} ... Menge d. Permutationen mit Block „abc"

  $|P_{abc}| = 3! = \underline{6}$

- P_{bcd} ... — " — Block „bcd"

  $|P_{bcd}| = 3! = \underline{6}$

- $|P_{cde}| = 3! = \underline{6}$

- P_{abcd} ... Menge d. Permutation mit Block „abcd"

  $|P_{abcd}| = 2! = \underline{2}$

- P_{bcde} ... — " — Block „bcde"

  $|P_{bcde}| = 2! = \underline{2}$

- P_{abcde} ... Menge d. Permutationen mit Block „abcde"

  $|P_{abcde}| = 1! = \underline{1}$

<u>Inklusions-Exklusions-Prinzip:</u>

$+ |P_{abcde}| - |P_{abcde}|$

$\Rightarrow$

$$|P| - |P_{abc}| - |P_{bcd}| - |P_{cde}| + |P_{abcd}| + |P_{bcde}| \cancel{- |P_{abcde}|} =$$

$$= 120 - 6 - 6 - 6 + 2 + 2 \cancel{+ 1} =$$

$$= 124 - 18 = \underline{\underline{106}}$$

~~$= 124 - 18 = \underline{\underline{105}}$~~

$\boxed{106}$

das gehört genau ausgeführt, warum wird das einfach „durchgestrichen"?!

Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e ohne die Blöcke „abc", „bcd", „cde":

4 (3) [4 Punkte = max(0, Anzahl richtiger Antworten - Anzahl falscher Antworten)]
Das heißt: Frage richtig gekreuzt: 1 Punkt, falsch gekreuzt: -1 Punkte, nicht gekreuzt: 0 Punkte; insgesamt aber nicht weniger als 0 Punkte auf die gesamte Aufgabe.

Wir betrachten die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die binäre Operation $\circ$, welche wie folgt definiert ist (wobei $\cdot$, $+$ die "gewöhnliche" Multiplikation bzw. Addition von ganzen Zahlen bezeichnen):

$$a \circ b := a + b - a \cdot b.$$

Man kreuze an, welche nachfolgend angegebenen Eigenschaften die Operation $\circ$ für die Menge $\mathbb{Z}$ besitzt.

Eigenschaft	Aussage	
$\circ$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Z}$	⊗ wahr	○ falsch
$\circ$ ist assoziativ	⊗ wahr	○ falsch
$\circ$ besitzt in $\mathbb{Z}$ ein neutrales Element	⊗ wahr	○ falsch
$(\mathbb{Z}, \circ)$ ist eine Gruppe	○ wahr	⊗ falsch

Anmerkung: Sie können selbstverständlich Nebenrechnungen machen, um dieses Beispiel zu lösen, aber für die Benotung dieser Frage ist nur relevant, was Sie hier in dieser Tabelle angekreuzt haben!
Hinweis zum 4. Punkt: Man vergleiche die beiden Elemente $1 \circ 1$ und $1 \circ 0$.

(1) abgeschlossen: $a \circ b \quad a, b \in \mathbb{Z}$

$a + b - a \cdot b = n \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ ✓

(2) assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$(a+b-ab)+c-(a+b-ab)\cdot c = a+(b+c-bc)-a\cdot(b+c-bc)$

$a+b+c-ab-ac-bc+abc = a+b+c-bc-ab-ac+bca$

$a+b+c = a+b+c$

$0 = 0$ wA ✓

(3) neutr. Element: $a \circ e = a$

$a + e - a \cdot e = a$

$e - a \cdot e = 0$

$e = 0$ ✓ wA ✓

(4) inv. Element: $a \circ a^{-1} = e$

$a + a^{-1} - a \cdot a^{-1} = 0$

$a + a^{-1} = a \cdot a^{-1}$ ↯ fA ✓