Der geradlinige Turm

Der Turm ist die Figur, die am häufigsten in kombinatorischen Aufgaben auf dem Schachbrett vorkommt. Sie wird sogar in seriösen mathematischen Werken erwähnt. Was können z. B. der Schachausdruck »Turm« und der rein mathematische Begriff »Polynom« miteinander zu tun haben? Der amerikanische Mathematiker W. J. Riordan verwendet in seinem Buch »Einführung in die kombinatorische Analysis« häufig den Begriff des »Turmpolynoms«. Es zeigt sich, daß viele kombinatorische Aufgaben, die in der angewandten Mathematik von Bedeutung sind, auf das Problem führen, bestimmte Aufstellungen von Türmen auf dem Schachbrett abzuzählen. Hierbei spielt folgendes Polynom eine wichtige Rolle:

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots + r_kx^k + \ldots + r_nx^n,$$

wobei r_k die Zahl der Aufstellungen von k sich gegenseitig nicht bedrohenden Türmen auf einem $n \times n$-Brett ($k \leqslant n$) bedeutet.* Das ist das erwähnte Turmpolynom. Es tritt bei der Lösung von Problemen in Kombinatorik, Gruppentheorie und Zahlentheorie auf. Hier ein bekanntes Beispiel aus der Kombinatorik:

Es sollen n Arbeitern n verschiedene Arbeitsgänge zugewiesen werden, wobei jeder Arbeitsgang von nur einem Arbeiter ausgeführt werden soll. Auf wieviel Arten läßt sich eine solche Zuordnung treffen?

Den Arbeitern sollen die Horizontalen und den Arbeitsgängen die Vertikalen eines $n \times n$-Brettes entsprechen. Wenn dem Arbeiter i der Arbeitsgang j zugewiesen wurde, so stellen wir einen Turm auf das Feld, in dem sich die Horizontale i und die Vertikale j schneiden. Da jeder Arbeitsgang von einem Arbeiter ausgeführt wird und jeder Arbeiter eine Arbeit zugewiesen bekommt, entsteht

* Selbstverständlich bedrohen sich zwei Figuren der gleichen Farbe beim Schach nicht gegenseitig. Wenn wir, die allgemein übliche Sprechweise benutzend, sagen, daß zwei Figuren einander bedrohen (einander angreifen), so meinen wir nichts weiter, als daß die Felder, auf denen sie stehen, miteinander durch einen Zug dieser Figuren verbunden sind.

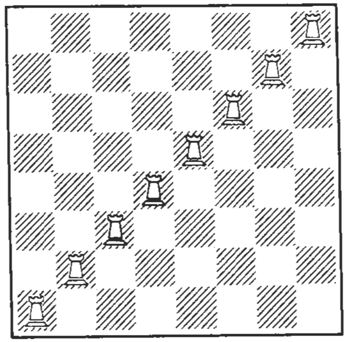


Abb. 34. Acht einander nicht bedrohende Türme

auf diese Weise eine solche Aufstellung der n Türme, bei der auf jeder Horizontalen und jeder Vertikalen genau ein Turm steht. Das heißt, die Türme bedrohen einander nicht. Somit können wir unser Problem als Schachaufgabe formulieren.

Auf wieviel Arten lassen sich n einander nicht bedrohende Türme auf einem n × n-Brett aufstellen?

Praktisch geht es bei dieser Aufgabe darum, den Koeffizienten r_n der höchsten Potenz des Turmpolynoms zu finden. Bevor wir zu seiner Berechnung übergehen, bemerken wir, daß bei einer beliebigen Anordnung von mehr als n Türmen mindestens auf einer Horizontalen oder einer Vertikalen zwei oder mehr Türme stehen müssen. Hieraus folgt, daß n die größte Zahl von friedlichen Türmen auf dem $n \times n$-Brett ist. Eine Aufstellung von acht friedlichen Türmen auf dem normalen Schachbrett zeigt Abb. 34.*

Wir wollen nun klären, wieviel der gesuchten Aufstellungen von n Türmen es auf dem $n \times n$-Brett gibt. Auf der ersten Vertikalen kann ein Turm auf irgendeinem der n Felder stehen, auf der zweiten Vertikalen lassen sich dann noch $n-1$ Felder beliebig mit einem Turm besetzen, ausgenommen die Horizontale, in der der Turm der ersten Vertikalen steht (die Türme sollen einander nicht bedrohen). Auf der dritten Vertikalen bleiben $n-2$ Felder usw. zu besetzen (ausgenommen die beiden Horizontalen, in denen die Türme der ersten und der zweiten Vertikalen stehen) bis zur $(n-1)$ten Vertikalen, bei der noch zwei Horizontalen zur Auswahl stehen, und zur letzten, der n-ten Vertikalen, in der genau ein einziges Feld

* Von diesem Kapitel an werden wir häufig mit Aufgaben zu tun haben, in denen eine Figur oder mehrere Figuren öfter vorkommen als in einem normalen Satz von Schachfiguren. In diesem Fall ist es bequemer, die Figuren in ein Diagramm einzuzeichnen, als sie auf dem Brett aufzustellen.

mit einem Turm besetzt wird. Kombinieren wir die n verschiedenen Aufstellungen des Turms auf der ersten Vertikalen mit den $(n-1)$ Aufstellungen auf der zweiten, den $(n-2)$ Aufstellungen auf der dritten usw., erhalten wir $n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ verschiedene Aufstellungen der Türme, womit die gesuchte Anzahl bestimmt ist. Speziell lassen sich auf dem gewöhnlichen Schachbrett acht einander nicht bedrohende Türme auf $8! = 40\,320$ Arten aufstellen.

Wenn wir die Türme mit den Zahlen von 1 bis n durchnumerieren, gibt es sogar $(n!)^2$ Aufstellungen von einander nicht bedrohenden Türmen. Dies ergibt sich daraus, daß die n Felder auf $n!$ Arten ausgewählt werden können und es ebensoviele Arten gibt, auf diesen Feldern n numerierte Türme aufzustellen.

Somit kann man n Arbeitern auf $n!$ verschiedene Arten n Arbeitsgänge zuweisen. Es möge eine Abb. 34 entsprechende Zuordnung vorliegen, d.h., dem Arbeiter i sei der Arbeitsgang i zugewiesen. Gesucht ist nun eine neue Zuordnung, bei der berücksichtigt werden soll, daß jeder Arbeiter seinen bisherigen Arbeitsgang wechseln möchte. Wie viele solcher Zuordnungen gibt es? Diese Aufgabe läßt sich auch mit Hilfe des Turms formulieren:
Auf wieviel Arten lassen sich n einander nicht bedrohende Türme auf dem $n \times n$-Brett aufstellen, wenn keiner von ihnen auf der Hauptdiagonalen (auf dem gewöhnlichen Brett die Diagonale a1–h8) stehen darf?
Die Zusatzbedingung erschwert die Lösung der Aufgabe beträchtlich. Nicht einmal Euler gelang es, eine allgemeine Formel für die Zahl A_n dieser Aufstellungen zu finden. Er leitete jedoch die Rekursionsbeziehung $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$ her, mit deren Hilfe man der Reihe nach die Werte von A_n für ein beliebiges $n \geqslant 3$ finden kann (es ist $A_1 = 0$ und $A_2 = 1$). Später wurde folgende Formel für A_n gefunden:

$$A_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

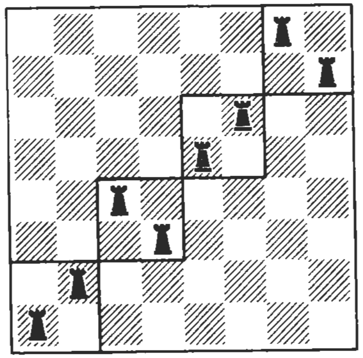
Für $n = 8$ erhalten wir $A_8 = 14\,833$, d.h., bei Beachtung der Zusatzbedingung vermindert sich die Zahl der Aufstellungen von acht einander nicht bedrohenden Türmen auf etwa ein Drittel. Bei den betrachteten Aufgaben mit dem Turm wie auch bei analogen Aufgaben mit anderen Figuren wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß alle Figuren die gleiche Farbe haben. Wenn man sowohl schwarze als auch weiße Figuren zuläßt, vergrößert sich die Zahl der Aufstellungen.
Auf wieviel Arten lassen sich n friedliche Türme auf dem $n \times n$-Brett aufstellen, wenn k weiß und $n-k$ schwarz sind?

Jede der Aufgabenstellung genügende Aufstellung ist gegeben durch die Auswahl von n Feldern für alle n friedlichen Türme und durch die Angabe, welche k der n Felder mit weißen und welche $n-k$ Felder mit schwarzen Türmen versehen werden sollen. Somit wird die gesuchte Anzahl $n! \cdot \binom{n}{k}$.

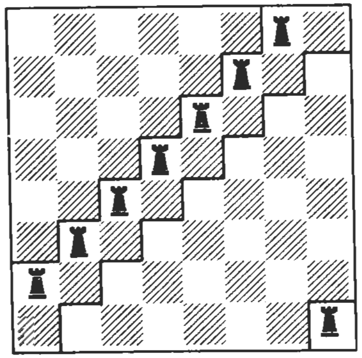
Betrachten wir noch einmal die Aufstellung von Abb. 34. Wir sehen, daß die acht Türme alle Felder des Brettes bedrohen (ausgenommen die Felder, auf denen die Türme selbst stehen). Entsprechend reichen zur Bedrohung aller Felder eines $n \times n$-Brettes n Türme aus. Wenn es weniger als n Türme sind, bleiben mindestens eine Vertikale und eine Horizontale leer, was bedeutet, daß das Feld im Schnittpunkt beider nicht angegriffen ist.
*Wieviel Möglichkeiten gibt es, n Türme derart auf dem $n \times n$-Brett aufzustellen, daß alle Felder bedroht sind?**
Wenn n Türme das Brett vollständig bedrohen, so steht auf jeder Vertikalen oder auf jeder Horizontalen mindestens ein Turm. Andernfalls gibt es nämlich genau wie beim eben erwähnten Fall von weniger als n Türmen eine Vertikale und eine Horizontale ohne Turm, und das beiden gemeinsame Feld bleibt unbedroht. Die Anzahl der Aufstellungen von n Türmen, je einer auf jeder Vertikalen, ist n^n. Tatsächlich kann der erste Turm auf jedes der n Felder der ersten Vertikalen gestellt werden, der zweite kann unabhängig vom ersten auf eines der n Felder der zweiten Vertikalen gestellt werden usw. Genauso viele Aufstellungen gibt es auch längs jeder Horizontalen, und es scheint auf den ersten Blick insgesamt $n^n + n^n = 2n^n$ Aufstellungen zu geben. Es werden jedoch bei dieser Abzählung alle Aufstellungen zweimal gerechnet, bei denen auf jeder Vertikalen und auf jeder Horizontalen genau ein Turm steht. Diese Aufstellungen sind dadurch charakterisiert, daß kein Paar von Türmen einander bedroht. Folglich ist die Lösung der Aufgabe durch die Zahl $2n^n - n!$ gegeben. Für das gewöhnliche Brett gibt es $2 \cdot 8^8 - 8! = 33\,514\,112$ Aufstellungen von acht das gesamte Brett bedrohenden Türmen.

Ebenso beliebt wie Aufgaben zur Aufstellung friedlicher Figuren sind analoge Aufgaben über einander angreifende Figuren. In den folgenden Kapiteln werden wir beide Typen von Aufgaben für jede

* In kombinatorischen Aufgaben dieses Typs wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß die von Figuren freien Felder bedroht werden. Man kann jedoch, wie in vorliegendem Fall, auch fordern, daß alle Felder des Brettes (besetzte und freie) bedroht werden. In der Folge werden wir stets dazu sagen, welcher der beiden Fälle gemeint ist.



a)



b)

Abb. 35a, b. Bretter mit verbotenen Feldern

der Schachfiguren betrachten. Am einfachsten sind sie für den Turm zu lösen, was augenscheinlich an seiner Geradlinigkeit liegt.

Bei den Aufgaben über die Aufstellung friedlicher Türme konnten wir das gesamte Brett benutzen. Jetzt nehmen wir an, daß es einige verbotene Felder gibt, auf die wir keinen Turm stellen dürfen. In diesem Fall sind interessante Tatsachen festgestellt worden. Wenn auf jeder Vertikalen und auf jeder Horizontalen eines $n \times n$-Brettes wenigstens zwei Felder für Türme zugänglich sind, so gibt es nicht weniger als zwei verschiedene Aufstellungen von n friedlichen Türmen. Dabei kann man auf dem $n \times n$-Brett n weiße Türme, die sich nicht gegenseitig angreifen, und gleichzeitig n schwarze Türme mit der gleichen Eigenschaft aufstellen. Wenn jede Vertikale und jede Horizontale genau zwei freie Felder enthält (insgesamt also $2n$ Felder des Brettes), so ist die Zahl der Aufstellungen von n friedlichen Türmen gleich 2^b, wobei $b \leqslant [n/2]$ (die eckigen Klammern bedeuten den ganzen Teil der Zahl) ist.

Veranschaulichen wir uns diesen Sachverhalt am Beispiel des gewöhnlichen Brettes (Abb. 35a). Jede Linie des Brettes enthält je zwei erlaubte Felder, die restlichen sind verboten. Die sechzehn erlaubten Felder sind zu vier 2×2-Quadraten angeordnet. In jedem Quadrat lassen sich zwei friedliche Türme auf zweierlei Weise plazieren (a1, b2 oder a2, b1) für das Quadrat links unten, c3, d4 oder c4, d3 für das nächste Quadrat usw.). Somit gibt es insgesamt $2^b = 2^4 = 16$ verschiedene Aufstellungen friedlicher Türme, und da $b \leqslant n/2 = 4$, ist das auch die maximal mögliche Zahl. Die einfachste Anordnung der Türme auf der Diagonalen zeigt Abb. 34. Eine Minimalvariante ist in Abb. 35b dargestellt. Hier gibt es nur zwei

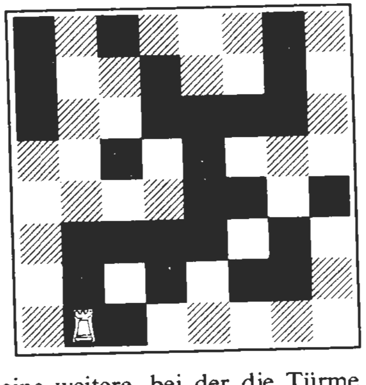


Abb. 36. Der Turm auf einem verminten Brett

Aufstellungen, eine diagonale und eine weitere, bei der die Türme alle Felder abseits der Diagonalen einnehmen.

In der folgenden Aufgabe mit Turm und König ist ebenfalls ein Teil des Brettes unzugänglich.

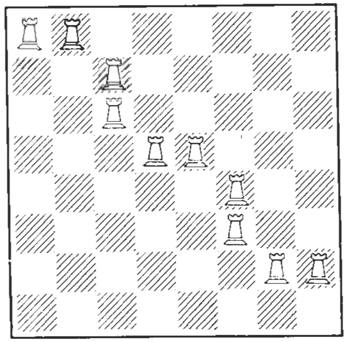
Eine bestimmte Anzahl von Feldern des $n \times n$-Brettes sei vermint, und zwar so, daß der König nicht von der einen Randvertikalen zur anderen gelangen kann. Es ist zu beweisen, daß der Turm in diesem Fall unter ausschließlicher Benutzung der verminten Felder von einer Randhorizontalen zur anderen (von der ersten zur letzten) gelangen kann.

In Abb. 36 sind die verminten Felder schwarz eingefärbt. Sie versperren dem König den Weg zwischen den beiden Randvertikalen. Über eine Brücke, die nur aus verminten Feldern besteht, kann der Turm von der ersten Horizontalen (vom Feld b1) auf die letzte Horizontale (zum Feld g8) gelangen.

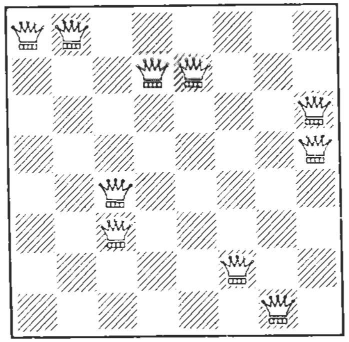
Bis jetzt haben wir uns mit friedlichen Türmen befaßt. In der nächsten Aufgabe können die Türme einander bedrohen, dürfen aber jeweils höchstens einmal angegriffen werden.

Welches ist die Maximalzahl von Türmen, die sich auf einem $n \times n$-Brett aufstellen lassen, wenn jeder von ihnen höchstens einmal bedroht sein darf?

Wir wollen uns davon überzeugen, daß sich auf die genannte Art nicht mehr als $4n/3$ Türme aufstellen lassen. Auf dem Brett mögen k Türme der Aufgabenstellung gemäß postiert worden sein. Alle mit Türmen besetzten Felder versehen wir zunächst mit der Zahl 0 und führen dann mit jeder der n Vertikalen folgende Operation aus. Wenn darauf zwei Türme stehen, so addieren wir zu den auf diesen Feldern stehenden Zahlen eins. Wenn nur ein Turm darauf steht, wird zwei addiert. Nun führen wir die gleiche Operation mit den n Horizontalen des Brettes durch. Am Ende enthält jedes mit einem



a)



b)

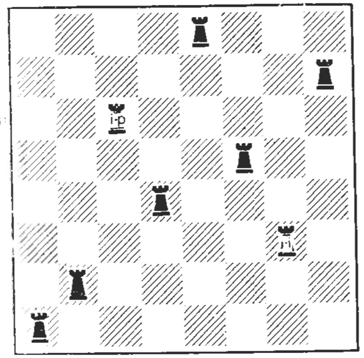
Abb. 37a, b. Acht Paare von Türmen und Damen

Turm besetzte Feld entweder eine Drei oder eine Vier. Folglich ist die Summe s aller Zahlen nicht kleiner als $3k$. Da wir aber in jede der n Vertikalen und Horizontalen nicht mehr als zwei Einheiten eingetragen haben, kann s nicht größer sein als $4n$. Somit ist $3k \leqslant \leqslant s \leqslant 4n$, woraus $k \leqslant 4n/3$ folgt. Also ist die Maximalzahl von Türmen gleich $[4n/3]$. Es zeigt sich, daß diese Zahl auch erreichbar ist. Für $n = 8$ haben wir $[4n/5] = 10$; die entsprechende Aufstellung der Türme ist in Abb. 37a dargestellt. Sie läßt sich leicht auf beliebiges n verallgemeinern. Eine Aufstellung von zehn Damen mit derselben Eigenschaft (jede der Damen wird nur von jeweils einer anderen bedroht) zeigt Abb. 37b. Im Gegensatz zu den Türmen ist das Problem für die Damen im allgemeinen Fall ungelöst.

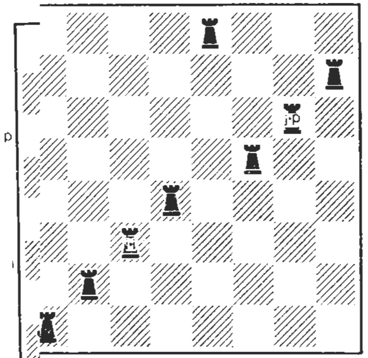
Kehren wir zur Aufstellung friedlicher Türme auf dem Schachbrett zurück.

Auf jedes Feld des Brettes sei das Produkt der Nummern der Horizontalen und Vertikalen geschrieben, zu denen es gehört. Acht einander nicht bedrohende Türme sind nun so aufzustellen, daß die Summe der Felder, die von ihnen besetzt sind, so groß wie möglich ausfällt.

Die Türme müssen auf der Hauptdiagonalen stehen (s. Abb. 34). Wir beweisen das indirekt und nehmen an, daß in der gesuchten Lösung Türme vorkommen, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen. Wir bezeichnen die Nummer der ersten Vertikalen, auf der ein solcher Turm steht, mit i und die Nummer der entsprechenden Horizontalen mit p; offenbar muß $p > i$ gelten (Abb. 38a). Es sei j die Nummer der Vertikalen, auf der der Turm der Horizontalen i steht. Dieser Turm steht auch außerhalb der Hauptdiagonalen,



a)



b)

Abb. 38a, b. Die Permutationsmethode

i. Nun denken wir uns jeden
und zwar rechts davon, d.h., es ist $j >$;alen so verschoben, daß ihre
dieser beiden Türme längs seiner Vertik n steht der erste der beiden
Horizontalen vertauscht werden. Dan Diagonalfeld) und der zweite
Türme auf der Horizontalen i (einem ist klar, daß die Türme sich
auf der Horizontalen p (Abb. 38b). Es
ebenfalls nicht gegenseitig bedrohen. r Zahlen für die beiden Auf-
Berechnen wir nun die Summen de uf die anderen Summanden
stellungen der vertauschten Türme (a ür die Anfangsstellung hatte
hat die Umstellung keinen Einfluß). F e neue Stellung $i^2 + j \cdot p$. Da
die Summe den Wert $i \cdot p + j \cdot i$, für di – $(ip + ji) = (jp - ip) - (ji - i^2)$
$j > i$ und $p > i$, haben wir $(i^2 + jp)$
$p(j - i) - i(j - i) = (p - i)(j - i) > 0$. ll größer. Das widerspricht
Also ist die Summe im zweiten Fa aß die Ausgangsstellung die
unserer Voraussetzung, die besagt, d
maximale Summe liefert.
die sogenannte Permuta-
Im wesentlichen haben wir hie sung verschiedener Optimie-
tionsmethode benutzt, die bei der Lö in der Theorie der Fahrpläne).
rungsprobleme Anwendung findet (z. B.: Man nimmt an, daß eine
Diese Methode besteht in folgendem gewissen Sinn die beste ist,
bestimmte Anordnung der Objekte in hritt durch Ausführen einer
verbessert sie jedoch im nächsten S kte und erhält folglich einen
Permutation (Vertauschung) der Obje
Widerspruch.
s stehen der Reihe nach die
Auf den 64 Feldern des Schachbrett ntalen die Zahlen 1 bis 8, auf
Zahlen 1 bis 64 (auf der ersten Horiz usw.). Wir stellen nun acht
der zweiten die Zahlen von 9 bis 16

einander nicht bedrohende Türme auf das Brett. Welche Werte kann die Summe der auf den von Türmen besetzten Feldern stehenden Zahlen annehmen?

Die auf der Vertikalen i und der Horizontalen j stehende Zahl läßt sich schreiben als $i + 8(j-1)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 8)$. Da die Türme einander nicht gegenseitig bedrohen, steht auf jeder Horizontalen und auf jeder Vertikalen genau ein Turm. Das bedeutet, daß die gesuchte Summe durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{j=1}^{8} 8(j-1) = (1+2+\ldots+8) + 8(0+1+\ldots+7)$$
$$= 260 \text{ (Magische Zahl!)}$$

und nicht von der konkreten Anordnung der friedlichen Türme abhängt. Die beiden letzten Aufgaben lassen sich leicht auf das $n \times n$-Brett verallgemeinern.

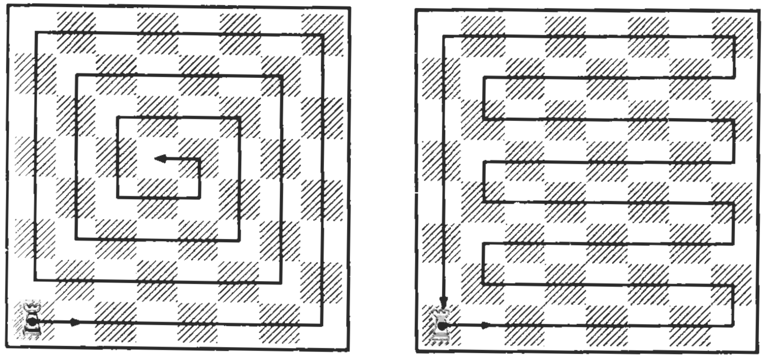
Auf dem $n \times n$-Brett sind Türme so aufgestellt, daß sie der folgenden Bedingung genügen: Wenn ein Feld frei ist, so ist die Gesamtzahl der Türme, die auf der gleichen Horizontalen und auf der gleichen Vertikalen stehen, nicht kleiner als n. Man zeige, daß mindestens $n^2/2$ Türme auf dem Brett stehen.

Betrachten wir diejenige der $2n$ Linien des Brettes, auf der die kleinste Zahl von Türmen steht (falls es mehrere solcher Linien gibt, wählen wir eine beliebige aus). Nehmen wir an, die Linie sei eine Horizontale (andernfalls drehen wir das Brett um 90°) und enthalte k Türme. Wenn $k \geqslant n/2$, so stehen auf jeder der n Horizontalen mindestens $n/2$ Türme, insgesamt auf dem Brett also mindestens $n^2/2$ Türme. Damit wäre alles bewiesen.

Nehmen wir nun an, daß $k < n/2$ ist. Auf der betrachteten Horizontalen gibt es $n-k$ freie Felder. Auf jeder durch diese Felder verlaufenden Vertikalen stehen laut Aufgabenstellung mindestens $n-k$ Türme. Auf allen diesen Vertikalen zusammen stehen also mindestens $(n-k)^2$ Türme. Die restlichen k Vertikalen enthalten mindestens k Türme (k war ja die Mindestzahl von Türmen auf irgendeiner der Linien). Somit stehen auf dem Brett mindestens $(n-k)^2 + k^2$ Türme. Wir müssen nur noch die Ungleichung $(n-k)^2 + k^2 \geqslant n^2/2$ beweisen. Das kann man auf verschiedene Weise tun, z. B. folgendermaßen:

$$(n-k)^2 + k^2 - n^2/2 = n^2/2 - 2nk + 2k^2 = 2(n^2/4 - nk + k^2)$$
$$= 2(n/2 - k)^2 > 0.$$

Wenn n gerade ist, können wir eine Aufstellung mit genau $n^2/2$ Türmen erhalten, vorausgesetzt, wir stellen alle auf gleichfarbige



a) b)

Abb. 39a, b. Marschrouten des Turms

Felder. Wenn n ungerade ist, lassen sich $(n^2+1)/2$ Türme aufstellen, und zwar stehen sie auf allen Feldern der Farbe, die häufiger auf dem Brett vorkommt.

Nun ist noch die Frage der Marschrouten des Turms auf dem Schachbrett offen. War es beim Springer kompliziert, Marschrouten zu finden, gibt es beim Turm überhaupt keine Schwierigkeiten. Abb. 39 zeigt zwei Marschrouten des Turms, eine offene (Abb. 39a) und eine geschlossene (Abb. 39b). Die erste läßt sich auf ein beliebiges $n \times n$-Brett verallgemeinern. Für die Existenz der geschlossenen Marschroute muß das Brett, wie beim Springer auch, gerade sein, denn schwarze und weiße Felder wechseln bei einer solchen Marschroute einander ab, so daß die Gesamtzahl der Felder gerade sein muß.

Der Turm möge das gesamte $n \times n$-Brett durchlaufen. Welches ist die kleinste Zahl von Richtungswechseln, die er dabei vornehmen kann?

Der Turm muß mindestens einen Zug längs jeder Vertikalen oder längs jeder Horizontalen ausführen. Falls es nämlich eine Vertikale geben sollte, längs welcher sich der Turm kein einziges Mal bewegte, müßte er alle ihre Felder quer dazu, also längs der Horizontalen, durchlaufen. Nehmen wir an, der Turm bewege sich mindestens einmal entlang jeder Vertikalen. Er muß jede dieser Vertikalen betreten und wieder verlassen (ausgenommen die Vertikalen, auf denen die Marschroute beginnt und endet). Mit Zutritt und Abgang ist notwendigerweise jeweils eine Richtungsänderung verbunden. Also beträgt die Gesamtzahl der Richtungsänderungen mindestens $2(n-2)+1+1 = 2(n-1)$. Für beliebiges n kann man eine Marschroute mit genau dieser Zahl von Richtungsänderungen aus der in Abb. 39a gezeigten Marschroute erhalten. Bei $n = 8$ ändert der Turm seine Richtung $2(8-1) = 14$mal.

Da die Zahl der Züge um eins größer ist als die Zahl der Richtungsänderungen, besteht die schnellste Marschroute über das $n \times n$-Brett aus $2(n-1)+1 = 2n-1$ Zügen; man kann sie für beliebiges n ebenfalls aus Abb. 39a entnehmen. Speziell kann der Turm das gewöhnliche Brett mit fünfzehn Zügen durchlaufen. Diese Marschroute ist offen. Eine geschlossene Marschroute besteht aus sechzehn Zügen (Abb. 39b).

Die Dame – Amazone des Schachbrettes

Während der Springer die komplizierteste Schachfigur ist und sich der Turm durch seine Geradlinigkeit auszeichnet, ist die Dame als stärkste Figur die Amazone des Schachbrettes. Die Möglichkeiten der Dame sind sehr groß, sie hält viele schachmathematische Rekorde.

Kann eine Dame den schwarzen König aus der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke, d.h. auf das Feld d3 des in Abb. 40 gezeigten Brettes treiben?

Wir zeigen zunächst, wie man den schwarzen König in die nächstliegende Ecke des Brettes drängt: 1. Dd2 Kb1 2. Dc3 Ka2 3. Dc1 Kb3 4. Dd2 Ka3. Schwieriger ist es, den König in die schräg gegenüberliegende Ecke zu treiben.

1. Dc3 + Ka2 2. Dc1 Kb3 3. Da1 Kc2 4. Da2 + Kc3 (4. ... Kc1 »verliert« schneller: 5. Db3 Kd2 6. Db1 Kc3 7. Da2 Kd3) 5. Db1 Kd2 6. Db2 + Kd1. Die entstandene Stellung ist zentralsymmetrisch zur Ausgangsposition; jetzt ist der König in die nächstliegende Ecke zu treiben: 7. Da2! Kc1 8. Db3 Kd2 9. Db1 Kc3 10. Da2 Kd3. Es wurde vorausgesetzt, daß Weiß die Dame behalten will, sonst wäre die Lösung noch einen Zug kürzer gewesen: 6. Dd3 + ! Kc1 7. Db3 Kd2 8. Db1 Kc3 9. Da2 Kd3.

In analoger Weise läßt sich der König in eine beliebige Ecke eines $m \times n$-Brettes treiben, jedoch nur unter der Bedingung $m \neq n$. Erstaunlicherweise ist es auf einem quadratischen Brett nicht möglich, den König in das Eckfeld zu treiben, das dem Ausgangsfeld am nächsten ist. Der König wandert zwischen zwei schräg gegenüberliegenden Ecken des Brettes hin und her, und die Dame kann seine Bahn nicht verändern. Die folgende Aufgabe des gleichen Typs steht dem realen Schachspiel etwas näher.

Die Aufgabe vom unberührbaren König. Der weiße König befindet sich auf c3 und darf nicht bewegt werden; deshalb heißt er unberührbar. Kann die weiße Dame mit Hilfe ihres unberührbaren Königs einen einzelnen schwarzen König matt setzen?