Runde 7, Beispiel 43

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man löse das RWP

$$y''(x) = 3x - 2; \qquad y(0) = 2; y'(1) = -3$$

2 Theoretische Grundlagen: Randwertaufgaben

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

3 Lösung des Beispiels

Zunächst integrieren wir zwei Mal:

$$y''(x) = 3x - 2$$
$$y'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c_1$$
$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + c_1 x + c_2$$

Einsetzen der Randbedingung $y(0) = 2$ ergibt $c_2 = 2$.
Einsetzen der Randbedingung $y'(1) = -3$ ergibt $c_1 = -\frac{5}{2}$.
Lösung ist somit:

$$\mathbf{y(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{x}x + 2}$$