

Analysis 2 - Übung 1

Felix Knorr

28. März 2014

- 4.) Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

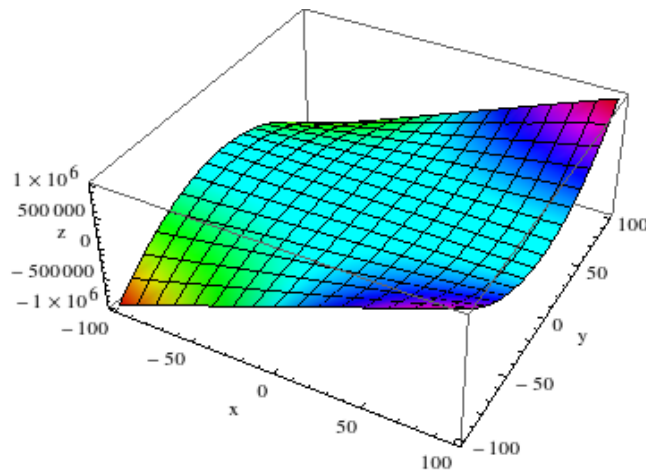


Abbildung 1: $f(x, y) = xy^2 - 10x$

$$z = xy^2 - 10x$$

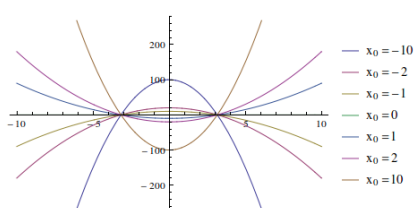
$$x = x_0 \Rightarrow f(x) = z = x_0 y^2 - 10x_0$$

$$y = y_0 \Rightarrow f(x) = z = x y_0^2 - 10x$$

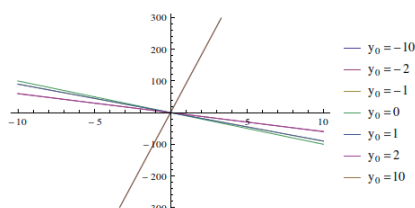
$$z = z_0 \Rightarrow y^2 = \frac{z_0}{x} + 10 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{z_0}{x} + 10}$$

- 11.) Man berechne alle Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie die Jacobi-Matrix für die folgenden Funktionen:

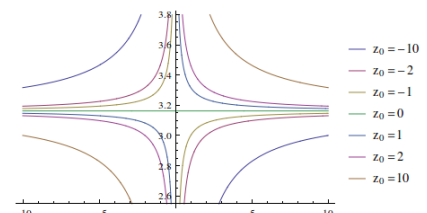
Nach Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}, \dots$ (Ist f m -mal stetig partiell differenzierbar in D , so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation)



(a) $x = x_0$



(b) $y = y_0$



(c) $z = z_0$ (Höhenlinien)

Abbildung 2: Beispiel 4

Jacobi Matrix Darunter versteht man eine $m \times n$ Ableitungsmatrix bzw. Funktionalmatrix einer differenzierbaren Funktion, die alle ersten partielle Ableitungen enthält

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

• $f(x, y, z) = x^2 \sin yz + e^{x+y+z}$

$$f_x = 2x \sin yz + e^{x+y+z}$$

$$f_y = x^2 z \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_z = x^2 y \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{xx} = 2 \sin yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{yx} = 2xz \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{zx} = 2xy \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{xy} = 2xz \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{yy} = -x^2 z^2 \sin yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{zy} = x^2 \cos yz - x^2 yz \sin yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{xz} = 2xy \cos yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{yz} = x^2 \cos yz - x^2 yz \sin yz + e^{x+y+z}$$

$$f_{zz} = -x^2 y^2 \sin yz + e^{x+y+z}$$

Jacobi-Matrix:

$$A = (f_x \quad f_y \quad f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x \sin yz + e^{x+y+z} \quad x^2 z \cos yz + e^{x+y+z} \quad x^2 y \cos yz + e^{x+y+z})$$

• $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \sin t \\ e^{3t} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = 2t \sin t + t^2 \cos t \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = 2 \sin t + 2t \cos t + 2t \cos t - t^2 \sin t$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = 3e^{3t}$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} = 9e^{3t}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial t} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g_3}{\partial t^2} = -\frac{2(1+t^2) - 2(1+t^2) \cdot 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^4} = -\frac{2(1+t^2) - 8t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{6t^2 - 2}{(1+t^2)^3}$$

Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \sin t + t^2 \cos t \\ 3e^{3t} \\ -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

• $\vec{h}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ e^{x+2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = 2x \sin y$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = 2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h_1}{\partial y \partial x} = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial y \partial x} = 2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = 2 \sin y$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} = e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = -x^2 \sin y$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} = 4e^{x+2y}$$

Jacobi-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \sin y & x^2 \cos y \\ e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \end{pmatrix}$$

- 28.) Gegeben sei die quadratische Form $q(\vec{x}) = q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A , sodaß $q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}^T$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

Quadratische Form:

Die quadratische Form aus Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und einer symmetrischen Matrix $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,
mit $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ ist $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$

Beispiele:

- n=2: $q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$
- n=3: $q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$

Definitheit:

Eine (symmetrische) Matrix A heißt

- Positiv Definit bei $q(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Positiv Semidefinit bei $q(\vec{x}) \geq 0$)
- Negativ Definit bei $q(\vec{x}) < 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Negativ Semidefinit bei $q(\vec{x}) \leq 0$)
- Indefinit sonst

Hauptminorenkriterium:

$q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}^T$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Hauptminoren sind positiv.

$q(\vec{x})$ ist negativ definit $\Leftrightarrow -q(\vec{x})$ positiv definit ist.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Pos. def., wenn: } \Rightarrow A_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Laplace'scher Entwicklungssatz (Determinanten berechnen):

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\forall i \leq n : \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$
- Entwicklung nach der i-ten Spalte: $\forall i \leq n : \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

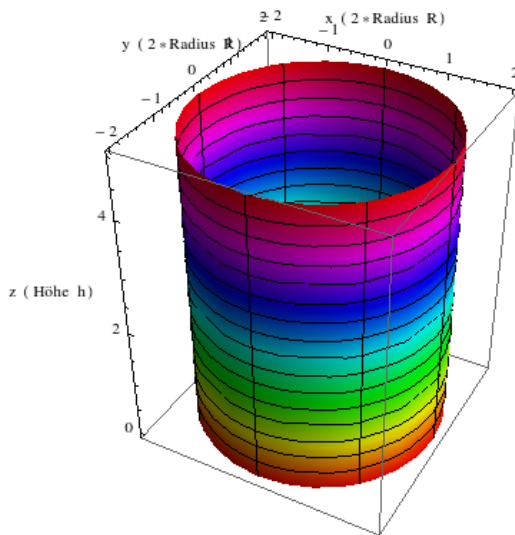
$(-1)^{i+j}$ bildet ein Schachbrettmuster:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

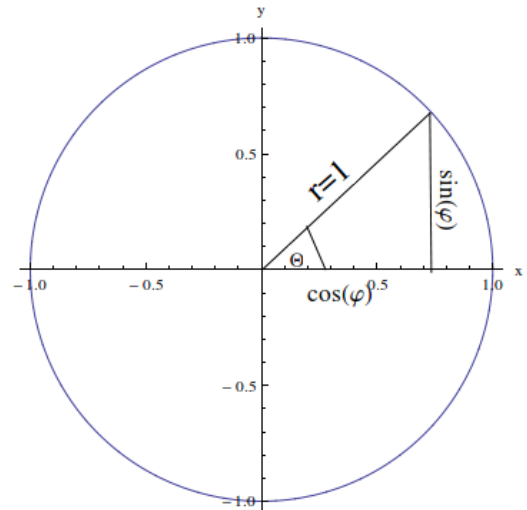
Beispiel (Entwicklung nach erster Zeile (1. Zeile ausgeblendet)):

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = +a_{11} * \underbrace{\det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}_{1. \text{ Spalte ausgeblendet}} - a_{12} * \underbrace{\det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}_{2. \text{ Spalte ausgeblendet}} +$$

$$a_{13} * \underbrace{\det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}_{3. \text{ Spalte ausgeblendet}} - a_{14} * \underbrace{\det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}_{4. \text{ Spalte ausgeblendet}} \Rightarrow \text{Bis Matrizen } \leq 3 \times 3, \text{ dann trivial}$$



(a) Zylinder mit R=2 und h=5



(b) Einheitskreis (Grundfläche, x,y-Ebene)

Abbildung 3: Beispiel 108

$$q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}$$

A ist positiv definit, wenn $\det A > 0$ und $a > 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a > 0$

$\Rightarrow \det A = 4 \cdot 25 - b^2 \Rightarrow 100 - b^2 > 0 \Rightarrow 100 > b^2 \Rightarrow 10 > b \Rightarrow \text{pos. def. } \forall b < 10$

108.) Man gebe eine Parametrisierung für die Mantelfläche eines Drehzylinders mit dem Radius R und der z-Achse als Rotationsachse an. Für welche Parameterwerte erhält man den Punkt $P(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}, 3\pi/4)$ auf der Zylinderoberfläche? Gesucht sind ferner die Parameterdarstellungen für folgende drei Kurven durch den Punkt P auf der Mantelfläche:

- eine Meridianlinie (d.h. Parallele zur Zylinderachse)
- einen Breitenkreis
- Eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe π

In Abb. 3 sieht man, dass $1^2 = 1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \Rightarrow R = R \cdot \cos^2 \varphi + R \cdot \sin^2 \varphi$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow R, \varphi, h = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \\ h \end{pmatrix}, \quad R, h \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

- **Parameter für Punkt $P(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}, 3\pi/4)$ berechnen:**

$$R \cdot \cos \varphi = R \cdot \sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \varphi = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad h = \frac{3\pi}{4}$$

- **Meridianlinie** (läuft parallel zur z-Achse durch Punkt P, x und y sind konstant):

$$\vec{x}_M(h) = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \\ h \end{pmatrix}, \quad R, h \in \mathbb{R}$$

- **Breitenkreis** (z (Höhe) ist konstant, x und y sind variabel):

$$\vec{x}_M(h) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}, \quad R \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

- **Schraubenlinie mit der Ganghöhe π :** (x,y,z sind variabel, durch Punkt P)

Schraubenlinie:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos t \\ R \cdot \sin t \\ h \cdot t + c \end{pmatrix} \Rightarrow R \cdot \cos t = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Bei $t = \frac{\pi}{4}$ muss $z(t) = h \cdot t + c = \frac{3\pi}{4}$ gelten.

Die Ganghöhe ist $\pi \Rightarrow$ Ganghöhe $g = 2\pi h \Rightarrow \pi = 2\pi h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow h \cdot t + c = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow c = \frac{6\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow c = \frac{5\pi}{8}$$

$$\vec{x}_S(h) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos h \\ R \cdot \sin h \\ \frac{h}{2} + \frac{5\pi}{8} \end{pmatrix}, \quad R, h \in \mathbb{R}$$

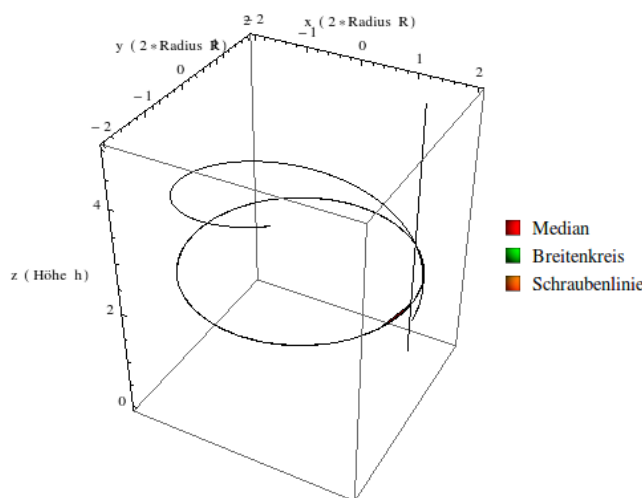


Abbildung 4: Median, Breitenlinie und Schraubenlinie

109.) Gegeben sein die parametrisierte Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch die Wendepunkte dieser Kurve bestimmen?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t}{x_t} \quad y_t = \frac{dy}{dt} = 3 \cos(3t) \quad x_t = \frac{dx}{dt} = \cos(t + \frac{\pi}{2}) \quad \frac{dy}{dx} = 3 \frac{\cos(3t)}{\cos(t + \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{x_t} = \frac{d}{dt} \left(3 \frac{\cos(3t)}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} \right) \frac{1}{x_t} \Rightarrow \left(\frac{u}{v} \right)' = \left(\frac{u'v - v'u}{v^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{-9 \sin(3t) \cos(t + \frac{\pi}{2}) + 3 \sin(t + \frac{\pi}{2}) \cos(3t)}{\cos^2(t + \frac{\pi}{2})} \cdot \frac{1}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} = \frac{-9 \sin(3t) \cos(t + \frac{\pi}{2}) + 3 \sin(t + \frac{\pi}{2}) \cos(3t)}{\cos^3(t + \frac{\pi}{2})}$$

- **Waagrechte Tangente:** Um die waagrechte Tangente zu bestimmen, muss die Ableitung $\frac{dy}{dx}$, nullgesetzt werden (x-Achse). Und diese $(\frac{dy}{dx} = 3 \frac{\cos(3t)}{\cos(t + \frac{\pi}{2})})$ ist 0, wenn $\cos(3t) = 0$, daher der Kosinus schwingt 3 mal in 2π (siehe Abb. 6(c)) und der Kosinus ist 0 bei $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, da er dreimal schwingt, ist er null, bei $\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

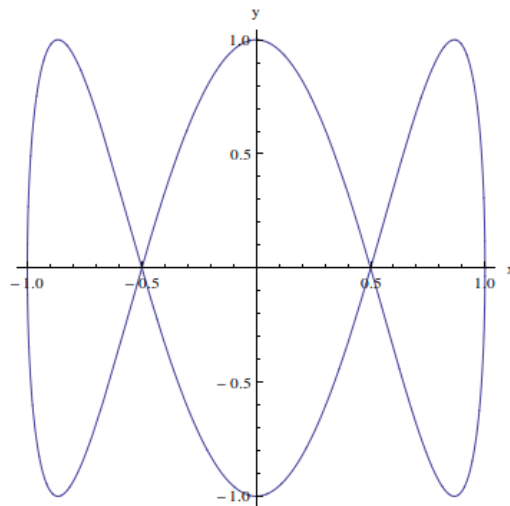


Abbildung 5: Lissajous Figur

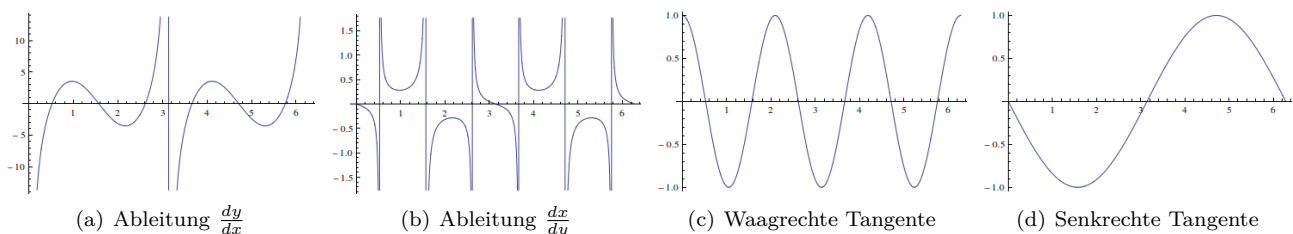


Abbildung 6: Beispiel 109

- **Senkrechte Tangente:** Um die senkrechte Tangente zu bestimmen, muss die Ableitung $\frac{dx}{dy}$, nullgesetzt werden (y-Achse). Und diese $\left(\frac{dx}{dy} = \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{3 \cos(3t)}\right)$ ist 0, wenn $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = 0$, daher der Kosinus ist um $\frac{\pi}{2}$ versetzt und entspricht dem Sinus (siehe Abb. 6(d)) und dieser ist 0 bei $\pi + k \cdot \pi \Rightarrow \pi, 2\pi$

- **Wendepunkte:** Dafür muss die zweite Ableitung 0 gesetzt werden und dies ist lt. Wolfram Alpha bei $t_1 = n \cdot \pi \pm 0.97$ und $t_2 = n \cdot \pi \pm 0.42$ und diese liegen etwa bei ± 0.5 (Es müsste eig noch dritte Ableitung gemacht werden)

110.) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x} : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\vec{x}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

als Parametrisierung der Oberfläche eines Torus angesehen werden kann. Erklären Sie diese Darstellung anhand einer geeigneten Skizze. Wie lautet die Jacobi-Matrix dieser Funktion?

In Abb. 7 sieht man den Torus aufgeschnitten, man sieht, dass bei 0° bzw. π ein Kreis in x-z-Achse entsteht (Abb. 8), bei $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$ ein Kreis in y-z-Achse. Die Höhe in Richtung z ist immer $\sin \theta$ ist. Zusammengefasst bis jetzt:

$$\begin{pmatrix} x(\theta, ?) \\ y(\theta, ?) \\ z(\theta, ?) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \theta \cdot ? \\ r \cdot \sin \theta \cdot ? \\ r \cdot \sin \theta \end{pmatrix}$$

Nun muss aber noch das x bzw das y verschwinden (abwechselnd), dafür wird ein zusätzlicher Winkel φ benötigt und zwar so:

- Das x soll bei $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ verschwinden $\Rightarrow \cos \varphi$
- Das y soll bei 0 und π verschwinden $\Rightarrow \sin \varphi$

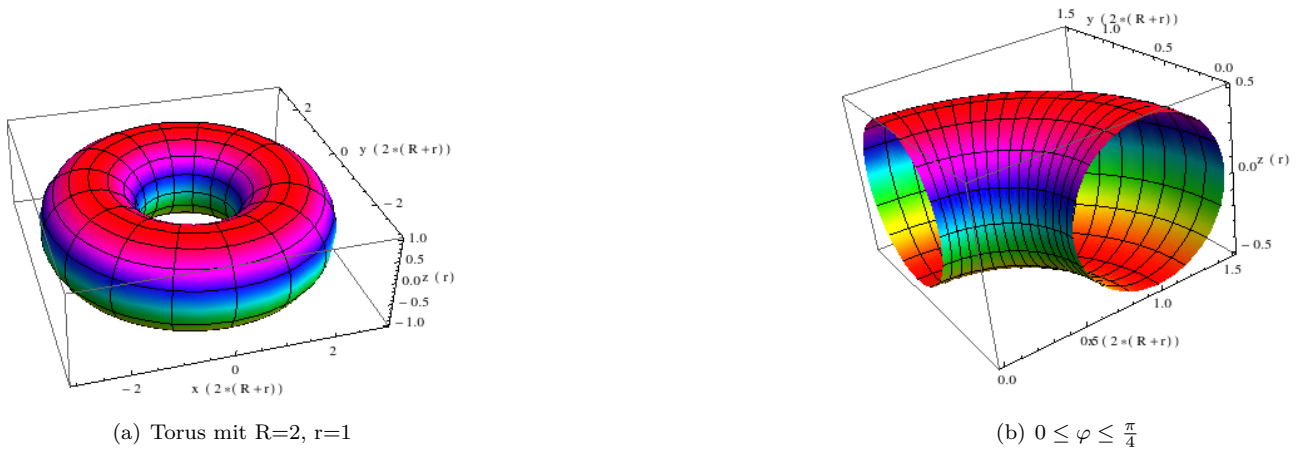


Abbildung 7: Beispiel 110a

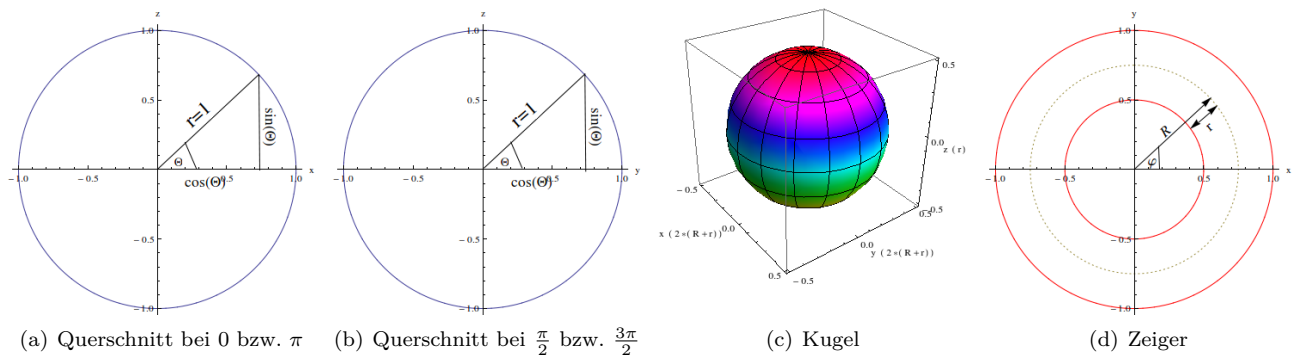


Abbildung 8: Beispiel 110a

Nun sieht die Matrix folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ r \cdot \sin \theta \end{pmatrix}$$

In Abb 8(c) sieht man den aktuellen Stand. Es fehlt noch das Loch in der Mitte. Für dieses benötigt man quasi eine Zeiger, welcher die Länge R hat und zum Mittelpunkt und sich mitdreht (Abb. 8(d)). Nun zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\theta, \varphi)}{\partial \theta} & \frac{\partial x(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} & \frac{\partial y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} & \frac{\partial z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -(R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi & (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ r \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$