8. UE Analysis für INF und WINF

208

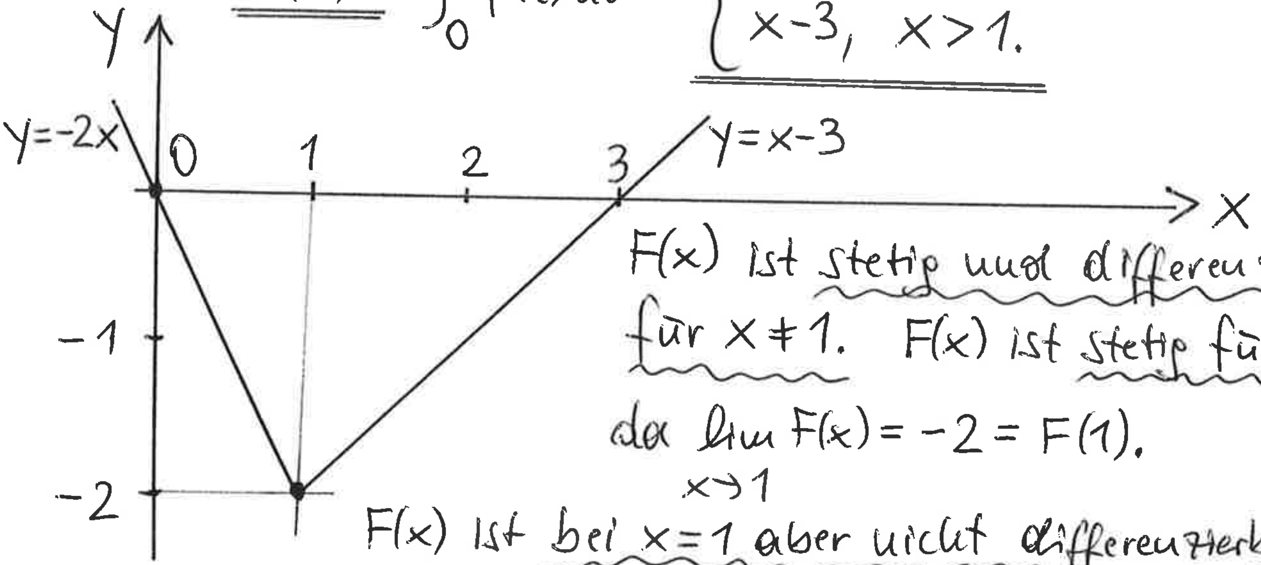
$$f(t)=\begin{cases}-2, & t\le 1,\\ 1, & t>1.\end{cases}$$

Fall 1: $x\le 1 \Longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(-2)\,dt=-2t\Big|_0^x=-2x.$

Fall 2: $x>1 \Longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=$

$=\int_0^1(-2)\,dt+\int_1^x 1\cdot dt=-2t\Big|_0^1+t\Big|_1^x=-2+x-1=x-3.$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{F(x)}}=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}-2x, & x\le 1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$$



F(x) ist stetig und differenzierbar für $x\neq 1$. F(x) ist stetig für $x=1$, da $\lim_{x\to 1}F(x)=-2=F(1)$.

F(x) ist bei $x=1$ aber nicht differenzierbar, da

$\lim_{x\to 1+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-3+2}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x-1}=1$ (rechtsseitige Ableitung), $\lim_{x\to 1-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-2x+2}{x-1}=-2.$

213 $f(x)=x^2$ ist auf $[2,3]$ monoton wachsend, daher ist die Obersumme bei äquidistanter Teilung gegeben durch:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{4k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\Big(4n+2(n+1)+$

$+\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\Big)=4+2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$

wie die folgende Nebenrechnung zeigt:

$$\sum_{k=1}^{n} 4 = 4n, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n} = \frac{4}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{6n} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n},$$ vgl. Hinweise (i)–(iii).

$$\Longrightarrow \int_2^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \left(4 + 2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}.$$

Probe: $$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

$\boxed{218}$ Gesucht ist eine Darstellung der Form:

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}), \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Wir versuchen es mit $a=0$, $b=1$, $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ und $\xi_k = \frac{k}{n}$. Dann haben wir: $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

also muss gelten: $$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Daher ist $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ eine geeignete Funktion.

Somit ergibt sich als Grenzwert Riemann'scher Zwischensummen: $$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 =$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$