3-A

Test 3 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"
19.6.2019
Gruppe A

Vorname: ______________________

Familienname: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgendes uneigentliches Integral

$$\int_0^\infty x e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1P fürs Integrieren (6 Punkte)

$$\int x e^{-x}\, dx = \underbrace{-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx}_{1P} = -xe^{-x} - e^{-x} \Big|_0^\infty$$

$f = x \quad g' = e^{-x}$ (1P)

$f' = 1 \quad g = -e^{-x}$ (1P)

1P

$$= \lim_{x\to\infty} -xe^{-x} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} - (0\cdot e^0 - e^0) = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

NR: $\lim\limits_{x\to\infty} -xe^{-x} = \lim \frac{-x}{e^{x}} = \lim \frac{-1}{-e^{-x}} = 0$ 1P

Aufgabe 2: Finden Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+xy-y^2}.$$

Bestimmen Sie auch, um welche Art (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) es sich dabei handelt.

(8 Punkte)

$f(x,y) = e^{x^2+xy-y^2}$

$f_x = e^{x^2+xy-y^2}(2x+y)$ 1P $\quad f_y = e^{x^2+xy-y^2}(x-2y)$ 1P

$f_{xx} = e^{x^2+xy-y^2}(2x+y)^2 + e^{x^2+xy-y^2} \cdot 2$ 1P

$f_{xy} \overset{1P}{=} e^{x^2+xy-y^2}(2x+y)(x-2y) + e^{x^2+xy-y^2} \cdot 1 \overset{\text{Satz v. Schwarz (1P)}}{=} f_{yx}$

$f_{yy} = e^{x^2+xy-y^2}(x-2y)^2 + e^{x^2+xy-y^2} \cdot (-2)$ 1P

Extrema / Sattelpunkte:

$f_x = 0 \qquad f_y = 0$

$\underbrace{e^{x^2+xy-y^2}}_{>0}(2x+y) = 0 \qquad \underbrace{e^{x^2+xy-y^2}}_{>0}(x-2y) = 0$

$\text{I} \quad 2x+y=0 \qquad \text{II} \quad x-2y=0$

$2\text{I} + \text{II} \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ in $\text{I} \Rightarrow y = 0$ (1P

Kandidaten: $(x,y) = (0,0)$

Hesse-Matrix in $(0,0)$

$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1P

Hauptminoren: $\det H_{11} = 2$

$\det H_{22} = \det H = -4 - 1 = -5$ $\Rightarrow$ indefinit

$\Rightarrow (0,0)$ ist ein Sattelpunkt

1P je partieller Ableitung, 1P Lösen von $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, 1P für Definitheitsverhalten

3 - A

Aufgabe 3: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + 10y'(x) + 9y(x) = 0$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 2$ und $y'(0) = -7$.

(6 Punkte)

$$y''(x) + 10y'(x) + 9y(x) = 0$$

1P

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \; y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 10\lambda e^{\lambda x} + 9 e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -5 \pm \sqrt{25-9} = -5 \pm 4 = -9 / -1 \quad (1P)$$

$$y(x) = C_1 e^{-9x} + C_2 e^{-x} \quad (2P) \qquad y' = -9C_1 e^{-9x} - C_2 e^{-x}$$

$$C_1 + C_2 = 2 \qquad -9C_1 - C_2 = -7$$

$$\begin{array}{r} C_1 + C_2 = 2 \\ -9C_1 - C_2 = -7 \\ \hline -8C_1 = -5 \end{array}$$

$$C_1 = \frac{5}{8} \qquad C_2 = \frac{11}{8}$$

2P für das Bestimmen der Konstanten

$$y(x) = \frac{5}{8} e^{-9x} + \frac{11}{8} e^{-x}$$

3 - B

Test 3 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"
19.6.2019
Gruppe B

Vorname: ______________________

Familienname: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgendes uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x} \mathrm{d}x.$$

(6 Punkte)

$$\int x e^{+x} dx = x e^{x} - \int e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} \Big|_{-\infty}^{0} =$$

$f = x \quad g' = e^{+x}$

$f' = 1 \quad g = e^{x}$

$$= -\lim_{x \to -\infty} x e^{x} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0} + (0 \cdot e^{0} - e^{0}) = 0 + (-1) = \underline{-1}$$

$$\text{NR: } \lim_{x \to -\infty} x e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Aufgabe 2: Finden Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = e^{2x^2+xy+y^2}.$$

Bestimmen Sie auch, um welche Art (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) es sich dabei handelt.

(8 Punkte)

$f(x,y) = e^{2x^2+xy+y^2}$ $\quad$ $d := d(x,y) = 2x^2+xy+y^2$

$f_x = e^d(4x+y)$ $\quad$ $f_y = e^d(x+2y)$

$f_{xx} = e^d(4x+y)^2 + e^d \cdot 4$

$f_{xy} = e^d(4x+y)(x+2y) + e^d \cdot 1 \overset{\text{Satz v. Schwarz}}{=} e_{yx}$

$f_{yy} = e^d(x+2y)^2 + e^d \cdot 2$

Extrema / Sattelpunkte: $\quad f_x = 0$ und $f_y = 0$

$\underbrace{e^d}_{>0}(4x+y) = 0 \Rightarrow 4x+y=0$ $\qquad$ $e^d(x+2y)=0 \Rightarrow x+2y=0$

$$\begin{aligned} 4x+y &= 0 \quad | \cdot (-2) \\ x+2y &= 0 \quad | + \\ \hline -7x &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

Kandidaten: $(x,y) = (0,0)$

Hesse-Matrix: $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Hauptminoren: $\det H_{11} = 4 > 0$

$\det H_{22} = \det H = 8-1 = 7 > 0$ $\Big] \Rightarrow$ pos. definit

$\Rightarrow (0,0)$ ist Minimum

3 - B

Aufgabe 3: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) - 8y'(x) + 17y(x) = 0$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$.

(6 Punkte)

$y'' - 8y' + 17 = 0$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert $\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$

$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 17} = 4 \pm i$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

$y'(x) = 4e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{4x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

$y(0) = 1 = C_1$

$y'(0) = 2 = 4C_1 + C_2$

$2 = 4 + C_2 \qquad C_2 = -2$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{4x}(\cos x - 2 \sin x)$