7

(1) [8 Punkte] Rechnen mit Kongruenzen.

(a) Unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus finde man ganze Zahlen e und f, welche folgende Gleichung erfüllen:

$$39e + 50f = 1.$$

(b) Mit Hilfe der Resultate des vorigen Punktes löse man die folgende Gleichung in $(\mathbb{Z}_{50}, +, \cdot)$, bestimme also $x \in \mathbb{Z}_{50}$, sodass diese Gleichung erfüllt ist:

$$\overline{39} \cdot x = \overline{4}.$$

351
-350

a) $50 = 39 \cdot 1 + 11$
$39 = 11 \cdot 3 + 6$
$11 = 6 \cdot 1 + 5$
$6 = 5 \cdot 1 + 1$ ✓
$5 = 1 \cdot 5 + 0$

$1 = 6 - 5 \cdot 1$
$1 = 6 - (11 - 6 \cdot 1) = (6 \cdot 2) - (11 \cdot 1)$
$1 = 2(39 - 11 \cdot 3) - 11 = \cancel{39 \cdot 11 \cdot 4}$
$\cancel{1 = 39 - 4(50 - 39 \cdot 1)}$
$\cancel{= 39 \cdot 2 - 4 \cdot 50}$
$1 = 2 \cdot 39 - 7 \cdot 11$
$= 2 \cdot 39 - 7 \cdot (50 - 39 \cdot 1)$
$1 = 9 \cdot 39 - 7 \cdot 50$

$e = 9$ $\quad f = -7$ ✓

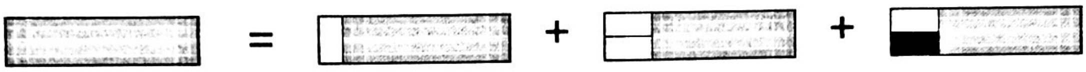
b) $\overline{39} \cdot 9 = \overline{1}$ $\quad | \cdot 4$
$\overline{39} \cdot 36 = \overline{4}$
$x = 36$ ✓

$39 \cdot 36$
117
234
1404

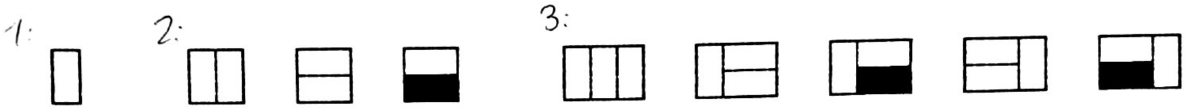
$1404 \in \overline{4}$

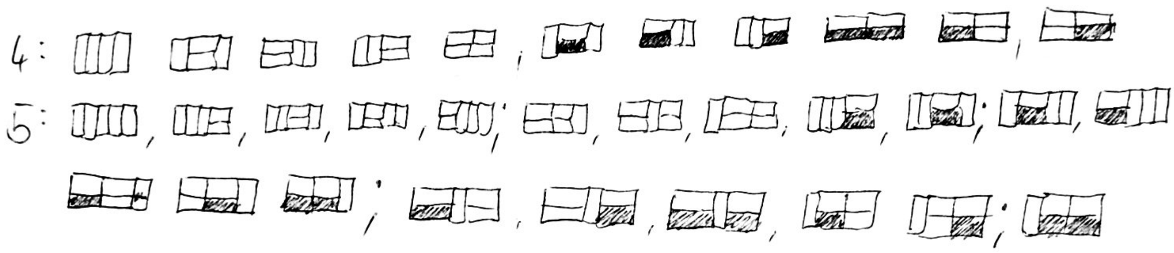
8 (2) [8 Punkte] Ein rechteckiges Band bestehend aus $2 \times n$ Quadraten (2 Zeilen und n Spalten) soll mit Dominos der Größe 1×2 Einheiten gepflastert werden. Dabei stehen zwei Varianten von Dominos zur Verfügung: weiß gefärbte und schwarz gefärbte. Die Dominos können horizontal oder vertikal positioniert werden; es gilt aber die Einschränkung, dass alle Quadrate der ersten Zeile des Bandes durch weiße Dominos belegt sein müssen. Auf wie viele verschiedene Arten kann dies geschehen?

Hinweis: Man kann für die gesuchten Anzahlen F_n eine Rekursion angeben, indem man nach dem Domino, das die linke obere Ecke pflastert, unterscheidet; diese ist dann zu lösen. "Symbolisch":



Anmerkung: Alle möglichen zulässigen Pflasterungen von Bändern mit $1 \leq n \leq 3$ sind nachfolgend angegeben; daraus ergibt sich $F_1 = 1$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$. $F_4 = 11$, $F_5 = 21$





$$F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2} \checkmark$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + 2F_n \checkmark \text{ mit } F_1 = 1 \text{ und } F_2 = 3 \text{ für } n > 0$$

$$F_{n+2} - F_{n-1} - 2F_n = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda^1 - 2 = 0$ $[p = -1 \quad q = -2]$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 0{,}5 \pm 1{,}5$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$ ✓(reell und verschieden)

$$F_n^{(h)} = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n = C_1 (-1)^n + C_2 (2)^n \checkmark$$

Gleichungssystem in 2 Variablen:

$$C_1 \cdot (-1)^3 + C_2 \cdot 2^3 = 5 = -C_1 + 8C_2 = 5$$

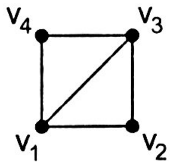
$$C_1 \cdot (-1)^4 + C_2 \cdot 2^4 = 11 = C_1 + 16C_2 = 11 \quad \to C_1 = \frac{1}{3}$$

$$24C_2 = 16 \to C_2 = \frac{2}{3}$$

$$\to \boxed{F_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right)} \checkmark$$

8 – (3) [8 Punkte] Ein bekannter Satz aus der Graphentheorie ist der sogenannte Satz von Kirchhoff, mit welchem sich die Anzahl der spannenden Bäume eines ungerichteten, zusammenhängenden Graphens unter Verwendung der Adjazenzmatrix berechnen lässt. Ihre Aufgabe ist es nun, der unten angegebenen Anleitung (welche der Anwendung des Satzes von Kirchhoff entspricht) für den hier abgebildeten Graphen G zu folgen:

G:



(a) Man bestimme die Adjazenzmatrix $A := A(G)$ des Graphens G bezüglich der angegebenen Knotensortierung.
(b) Man bestimme die sogenannte Valenzmatrix B des Graphens G: B ist dabei die Diagonalmatrix gebildet aus den Knotengraden der Knoten von G (bezüglich der angegebenen Knotensortierung), also $B := \operatorname{diag}(d(v_1), d(v_2), d(v_3), d(v_4))$.
(c) Man bestimme die sogenannte Laplace-Matrix L mittels $L := B - A$.
(d) Man bestimme den Kofaktor $L_{1,1}$ der Laplace-Matrix L, also die Determinante der Matrix, welche aus L durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte entsteht. Voilà, wenn Sie richtig gerechnet haben, ergibt $L_{1,1}$ laut dem vorhin genannten Satz die Anzahl der spannenden Bäume von G. ✓

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

c) $L = B - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

d) $L' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

VZ-Fehler!

$L_{1,1} = |L'| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\ominus}{+} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2(3 \cdot 2 - 1) - (-2) = 2 \cdot 5 + 2 = \underline{12}$

7 -

(4) [8 Punkte] Fragen zur Linearen Algebra.

(a) Man definiere den Begriff einer "**Linearkombination**" von Elementen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ eines Vektorraums V über einem Körper K und definiere weiters, wann eine Linearkombination "**trivial**" ist.

(b) Man gebe eine mathematisch exakte Definition dafür, dass eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraums V eine "**Basis**" darstellt und definiere den Begriff "**Dimension**" eines Vektorraums V.

(c) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W (über demselben Körper K). Man definiere die Begriffe "**Kern von** f" und "**Bild von** f" und formuliere weiters die "**Rangformel (= Dimensionssatz)**" für lineare Abbildungen.

a) Die Linearkombination bezeichnet die Verknüpfung eines oder mehrerer Vektoren durch lineare Transformationen, dazu gehören Addition und Multiplikation. Genau genommen können Vektoren einander addiert werden, und Vektoren mit Skalaren multipliziert werden. Die Multiplikation ~~ist~~ mit Null ist eine triviale Linearkombination.

ungenau erklärt

b) Die Basis $B \subseteq V$ eines Vektorraums V ist ~~a~~ eine Teilmenge von V dessen lineare Hülle $[B]$ gleich dem Vektorraum V ist. Alle Vektoren in B sind linear unabhängig.

Die Dimension eines Vektorraums V ist definiert über die Anzahl seiner ~~der~~ Vektoren.

c) Der Kern von $f: V \to W$ ~~behi~~ beinhaltet alle Elemente ~~aus~~ $v \in V$ deren Wert $f(v)$ den Nullvektor ergibt. Also alle Elemente $v \in V$ die über f auf den Nullvektor abbilden.

Das Bild von $f: V \to W$ beschreibt die Menge aller Elemente $w \in W$ auf ~~über~~ die durch f abgebildet werden kann. Also alle Elemente die durch Einsetzen aller Elemente aus V in f erreicht werden können.

Der Rang einer linearen Abbildung gibt die Anzahl der Vektoren der Basis an; also die minimale Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

~~Rangformel~~