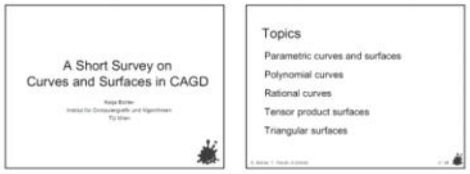
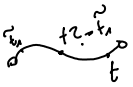
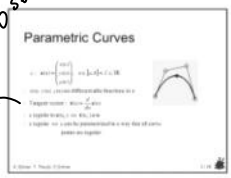
Montag, 22. März 2010
16:06

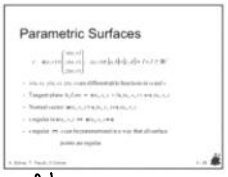


Bogenlängenparametrisierung



sollte = 0 sein!





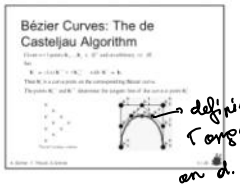
Änderung glob. d.

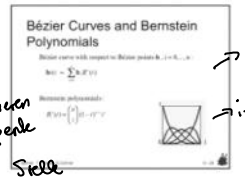
Punkt ist gegeben d. Parameterpaar u_0, v_0

$x(u,v) = u^2 v + v$

$x_u = 2uv$

$x_v = u^2 + 1$





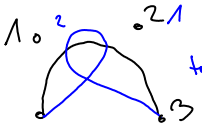
→ summe gleich 1

→ i-ter Kontrollpkt

definieren Tangente an d. Stelle t

1. Ableitung führt zu Unstetigkeit

Abgeleitete Bernstein-polynome ergeben 0 bis auf b_0 u. b_n

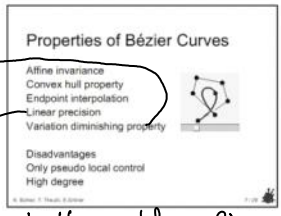


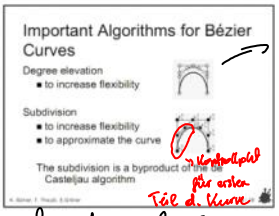
nähert sich tangential zur Gerade $n-(k-1)$ an

0

Kurve wird einfacher sein als Kontroll-polygon

Kurve muss in d. konvexen Hülle d. Kontrollpolygons liegen



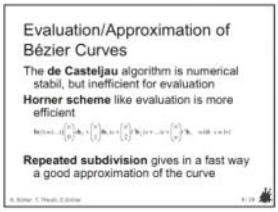


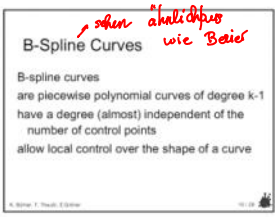
Kontrollpkt für ersten Teil d. Kurve

Erhöhung d. Anzahl d. Kontrollpunkte für mehr Flexibilität der Kurvenverlauf bleibt gleich

Plotterung basiert auf Casteljau

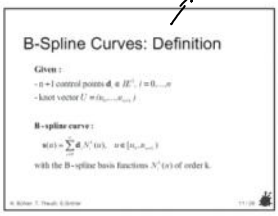
Kontrollpunkte liegen auf einer Linie → Kurvenpunkte auch

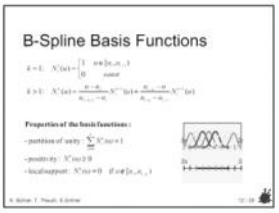




sehen ähnlichkeiten wie Bezier

Kurve geht nicht d. ersten & letzten Kontrollpkt.





Properties of B-Spline Curves

Affine invariance
Strong convex hull property
Variation diminishing property
Local support
Knot points of multiplicity k are coincident with one of the control points.
A B-spline curve of order k which has only knots of multiplicity k is a Bézier curve

Evaluating B-Spline Curves: The de Boor Algorithm

Direct Evaluation of B-Spline Curves

Find the knot span $[u_i, u_{i+1})$ in which the parameter value t lies
Compute all non zero basis functions
Multiply the values of the nonzero basis functions with the corresponding control points

Special B-Spline Curves

open:

closed:

uniform:

Important Algorithms for B-Spline Curves

Knot insertion
- to increase flexibility
- to compute derivatives
- to split curves (subdivision algorithms)
- to evaluate the curve (see de Boor algorithm)
- to approximate the curve

Degree elevation
- to adapt curve degrees

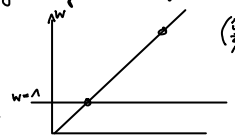
Rational Curves

Derivation für alle Fkt. gleich.

↳ Unterschied zw. Knotenvektor u. -pkt wichtig!

k → erhöht → Σ influss d. Kontrollpkt wird höher
k größer ist, damit Anzahl d. Kontrollpkt unabhängig v. Kontrollpkt.

K Kegelschnittlinien waren bei B-Splines nur approximierbar
Kontrollpkt können zusätzlich ein zusätzliches Gewicht.
Kontrollpkt hat zusätzlich zur Gewichtfkt ein variabler Gewicht



$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix}$

3

jeder Kontrollpkt trägt ein Gewicht w_i
↳ Verlust d. Eigenschaft: Konvexe Hülle-Eigenschaft $\sum^n B_i(u) = 1$
stattdessen: $\sum w_i \cdot B_i(u) = 1$, Behebung durch Homogenisierung

$w_i B_i(u)$
$\sum^n w_i B_i^n(u)$

Rational Bézier Curves

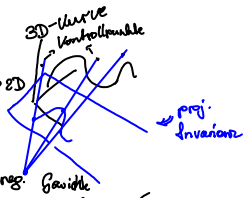
rational, da offen u. unten Auswirkung v. u abhängt

Rational Bézier Curves: Properties and Algorithms

Properties:
- the same properties like polynomial curve, and
- projective invariance → pers. Projektion
- the weights are an additional design parameter

Algorithms
- All algorithms of polynomial Bézier curves can be applied without any change to the homogeneous representation of rational Bézier curves.

3D → 2D



auch neg. Gewichte möglich

Am Rändlippen im GRT-Bereich lokaler Einfluss, die meisten gängigen Kurven darstellbar
d_i → Kontrollpkt., w_i → Gewichte
Verallgemeinerung d. rat. Bezierkurve

Non Uniform Rational B-Splines

$\sum N_i^k = 1$
↓
Gewichtfkt.

Auch ↳ selbe Gewfkt.

$\sum N_i^k \neq 1$

wie d. Knotenvektor definiert ist, Knotenpkt-abhängig auf wieviel d. Kurve hat d. Punkt Einfluss
Gewichtspkt. haben unterschiedl. Abstand

NURBS: Properties and Algorithms

Properties:
- the same properties like polynomial curve, and
- projective invariance
- changing the weight w_i affects only the interval $[u_i, u_{i+k})$

Algorithms
- All algorithms of B-spline curves can be applied without any change to the homogeneous representation of NURBS curves.

Tensorproduct surfaces

"A surface is the locus of a curve that is moving through space and thereby changing the shape"

i ed. Kontrollpkt. wird d. äre Kurve ersetzt

↳ Kontrollpkt.-gitter

Tensorproduct Bézier Surfaces

A tensorproduct Bézier surface is given by

The Bézier points b_{ij} form the control net of the surface.

4

Tensor Product Bézier Surfaces Properties and Algorithms

Properties: → Konvexe-Hülle-Eig.

analogue to that of Bézier curves

Algorithms:

Apply algorithms for curves in two steps:

- Apply to
- Apply to

Tensorproduct B-Spline Surfaces

A tensorproduct B-spline surface with respect to the knot vectors

$U = (u_0, \ldots, u_{n+k+1}) \in \mathbb{R}^{n+k+1}$, $V = (v_0, \ldots, v_{m+l+1})$

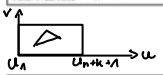
is given by

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{d}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v), \quad (u,v) \in [u_k, u_{n+1}] \times [v_l, v_{m+1}] \subset \mathbb{R}^2.$$

The control points $\mathbf{d}_{ij}$ form the control net of the surface.

Properties and Algorithms are analogue to the description for Bézier tensor product surfaces.

→ auch auf Bézier anwendbar



3-Ecks Gitter

Bézier Triangles

Δ-Ige Anordnung d. Kontrollpkt.

A triangular Bézier patch is defined by

$$\mathbf{s}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{b}_{ijk} B_{ijk}^n(\alpha,\beta,\gamma)$$

↓ 3 Parameter

Pkte innerhalb des 3 Ecks an

The α, β, γ are barycentric coordinates of the triangular parameter domain.

Generalized Bernstein polynomials:

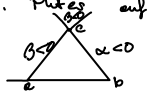
$$B_{ijk}^n(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

$p = \alpha \cdot a + \beta b + \gamma \cdot c$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$

$\alpha, \beta,$ od. $\gamma < 0 \Rightarrow$ Pkt außerhalb d. Δ-Ecks

Aufgrund d. Vorzeichen Idealisierung d. Pktes auf ersten Blick sichtbar:



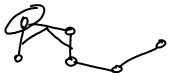
Bézier Triangles: Properties and Algorithms

Properties:

- the same as in the univariate case

Algorithms:

- De Casteljau: → nur mit 3 Pkten
- Subdivision → subdivision surfaces entstehen dadurch, dass man Ecken abschneidet
- Degree elevation



markante Ecken werden weggeschnitten

5