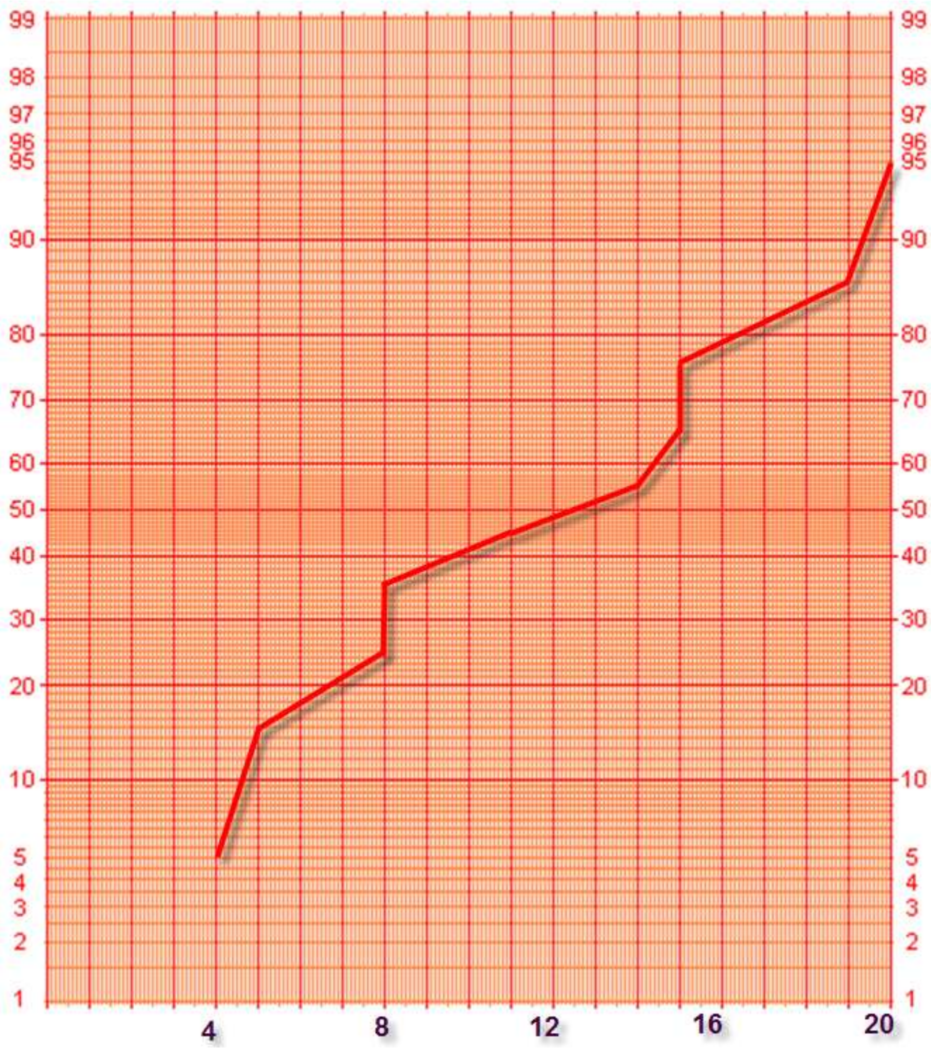
Prüfungsbeispiel 24

3) Eine Stichprobe der Ergebnisse eines Übungstests bei Studenten der Richtung Wirtschaftsingenieurwesen / Maschinenbau sei in den 3 Übungsgruppen wie in folgender Tabelle gegeben:

	Punkte										$\bar{x}_j$	s_i
Gruppe 1	15	19	5	11	20	4	15	8	8	14	11.9	5.587
Gruppe 2	8	15	6	3	4	13	9	7	13	14	9.2	4.315
Gruppe 3	12	10	12	9	11	10	2	7	5	4	8.2	3.521

Es gilt: $\sum_{i=1}^{30} x_i = 293$

a) Überprüfen Sie graphisch, ob die Werte in der Gruppe 1 normalverteilt sind und schätzen sie die Parameter der Normalverteilung graphisch.



Anmerkungen Wahrscheinlichkeitspapier:

(i) Eintragen der Punkte $P(x_i, y_i)$ im Wahrscheinlichkeitspapier wobei die x_i aus der Gruppe 1 entnommen werden, die Koordinaten y_i werden nach der Formel $y_i = \frac{i - 0{,}5}{n}$ berechnet. In unserem Fall ist n=10.

(ii) Verbinden der Punkte.

(iii) Polygonzug schneidet bei die 50%- Linie bei $x = \mu$ und die 84,13% - Linie bei $x = \mu + \sigma$

In unserem Beispiel lesen wir ab: $\underline{\underline{\mu = 12{,}5}}$ und $\mu + \sigma = 18{,}5$, daraus folgt $\underline{\underline{\sigma = 6}}$

b) Überprüfen Sie (unter Normalverteilungsannahme), ob für Gruppe 2 und Gruppe 3 die Varianzen übereinstimmen (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$).

Test der Gleichheit zweier Varianzen (F-Test)

$H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \qquad H_1 : \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$

$$T = \frac{s_2^2}{s_3^2} = \frac{18{,}619}{12{,}397} = \underline{\underline{1{,}502}}$$

$c_3 = F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4{,}026} = \underline{\underline{0{,}248}}$ $\qquad c_4 = F_{n_1-1, n_2-1; 1-\frac{\alpha}{2}} = \underline{\underline{4{,}026}}$ Skriptum Seite 123

Entscheidung gegen H_0, falls $T < c_3$ oder $T > c_4$. Skriptum Seite 131.

$H_0 :\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ wird nicht abgelehnt. Die Gleichheit der Varianzen ist gegeben.

c) Testen Sie (unter Normalverteilungsannahme) für die Gruppe 1, ob die mittlere Punktezahl signifikant kleiner als 10 ist (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$).

$H_0 :\ \mu \leq \mu_0 \qquad H_1 :\ \mu > \mu_0$

Testgröße: $t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{11{,}9 - 10}{5{,}587} \cdot \sqrt{10} = 1{,}075$

Kritischer Bereich: $t \geq t_{n-1, 1-\alpha} = t_{9, 0.95} = 1{,}833$

Testgröße nicht überschritten, daher Annahme von $H_0 :\ \mu \leq \mu_0$

d) Nehmen Sie an, dass die Daten in den einzelnen Gruppen normalverteilt sind mit der gleichen Varianz σ. Stimmen die mittleren Punktezahlen in den drei Gruppen überein (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$).

	Punkte										$\bar{x}_j$	s_i
Gruppe 1	15	19	5	11	20	4	15	8	8	14	11.9	5.587
Gruppe 2	8	15	6	3	4	13	9	7	13	14	9.2	4.315
Gruppe 3	12	10	12	9	11	10	2	7	5	4	8.2	3.521

Einfache Varianzanalyse:

$$q = q_I + q_Z$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}(\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}(x_{ij} - \bar{x})^2}_{q} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}_{q_I} + \underbrace{10 \cdot \sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_j - \bar{x})^2}_{q_Z}$$

$$q = \sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 = 3495 - 30 \cdot 95{,}387 = \underline{\underline{633{,}36}}$$

$$\bar{x} = \frac{293}{30} = 9{,}766$$

$$q_Z = 10 \cdot [(11{,}9 - 9{,}766)^2 + (9{,}2 - 9{,}766)^2 + (8{,}2 - 9{,}766)^2] = 10[4{,}551 + 0{,}321 + 2{,}454] = \underline{\underline{73{,}266}}$$

$$q_I = q - q_Z = 633{,}366 - 73{,}266 = \underline{\underline{560{,}1}}$$

Variation	FG	Quadratsumme	s^2	F
Zwischen den Gruppen	k-1 = 2	$q_Z = 73{,}266$	$s_Z^2 = \frac{q_Z}{k-1} = 36{,}633$	1,766
Innerhalb der Gruppen	n-k = 27	$q_I = 560{,}1$	$s_I^2 = \frac{q_I}{n-k} = 20{,}744$	
Total	n-1 = 29	$q = 633{,}36$		

$$F_{k-1,n-k;1-\alpha} = F_{2,27;1-0.05} = 3{,}354$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

krititischer Wert $F > F_{k-1,n-k;1-\alpha}$

kritischer Wert nicht überschritten, daher gilt $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$