Lösung zu Beispiel 150

Aufgabe: Zeigen Sie, dass für je zwei Funktionen f und g aus der Menge

$$\{1/\sqrt{2}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots\}$$

gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \equiv g, \\ 0 & \text{falls } f \not\equiv g. \end{cases}$$

Lösung:
- Der Fall $f(x) = 1/\sqrt{2}$: Die Identitäten

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dx = 1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(nx)dx = 0,$$

und

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(nx)dx = 0,$$

($n \in \mathbb{N}^+$) sind klar.
- Der Fall $f(x) = \sin(nx)$, $g(x) = \cos(mx)$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$): Da $\sin(nx)$ eine ungerade und $\cos(mx)$ eine gerade Funktion ist, ist das Produkt $\sin(nx)\cos(mx)$ ungerade. Für jede ungerade Funktion y gilt aber

$$\int_{-C}^{C} y(x)dx = 0,$$

denn

$$\int_{-C}^{C} y(x)dx = \int_{-C}^{C} -y(-x)dx = \int_{C}^{-C} y(u)du = -\int_{-C}^{C} y(u)du,$$

wobei wir hier die Substitution $-x = u, -dx = du$ verwendet haben. Daher ist auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0.$$

- Der Fall $f(x) = \sin(nx)$, $g(x) = \sin(mx)$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$): Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx}_{=:A} &= \underbrace{-\frac{1}{n}\cos(nx)\sin(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{m}{n}\cos(nx)\cos(mx)dx \quad (1) \\ &= \underbrace{\frac{m}{n^2}\sin(nx)\cos(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \underbrace{- \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{m^2}{n^2}\sin(nx)\sin(mx)dx}_{=\frac{m^2}{n^2}A}. \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ folgt aus $A = \frac{m^2}{n^2} A$ natürlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = A = 0.$$

Für $m = n$ liest sich (1) als

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx}_{A} = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos^2(nx)}_{1-\sin^2(nx)} dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1dx}_{2\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx}_{A},$$

also

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = A = \pi.$$

- Der Fall $f(x) = \cos(nx)$, $g(x) = \cos(mx)$: Die Behauptung folgt in diesem Fall ganz einfach aus der Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx,$$

die wir in (1) als Zwischenergebnis erhalten haben.