# Lösung von Aufgabe 212

$$\int \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{g}\, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{g'}\, dx$$

(partielle Integration)

**1. Nebenrechnung:** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\sin^2 t \cdot \cancel{\cos t}}{\cancel{\cos t}}\, dt$

**Substitution:** $x = \sin t$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$dx = \cos t\, dt$, $t = \arcsin x$ (entspricht $-1 < x < 1$)

**2. Nebenrechnung** (ähnlich einem Beispiel der Vorlesung):

$$\int \sin^2 t\, dt = \int \underbrace{\sin t}_{f} \cdot \underbrace{\sin t}_{g'}\, dt = \underbrace{\sin t}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos t)}_{g} - \int \underbrace{\cos t}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos t)}_{g}\, dt =$$

$$= -\sin t \cdot \cos t + \int \cos^2 t\, dt = -\sin t \cos t + \int (1-\sin^2 t)\, dt =$$

$$= -\sin t \cdot \cos t + t - \int \sin^2 t\, dt \Longrightarrow 2\int \sin^2 t\, dt = t - \sin t \cdot \cos t + C_1$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2 t = \frac{1}{2}\left(t - \sin t \cdot \cos t\right) + C_2$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\arcsin x - x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + C_2$$

Insgesamt erhalten wir somit:

$$\int x \cdot \arcsin x = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{4}\left(\arcsin x - x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \arcsin x + \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Probe** (durch Differenzieren): $x \cdot \arcsin x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$

$+ \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \cdot x \cdot (-\cancel{2}x) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x +$

$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\left(2x^2 - 1 + 1 - x^2 - x^2\right)}_{=0} = x \cdot \arcsin x$