Analysis UE 7

Styll Patrick

18. Mai 2022

1 - Beispiel 196

Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}$

---

a) Da wir bei Einsetzen mit 1 durch 0 dividieren und somit eine unbestimmte Form erhalten, formen wir dementsprechend um:

$$\frac{2(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{3(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$\frac{-2x^3+3x^2-1}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$\frac{(2x+1)\cancel{(1-x)}(-1)}{\cancel{(1-x)}(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$\frac{-2x-1}{(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{-2x-1}{x^3+2x^2+2x+1}$$

Wenn wir nun für $x = 1$ einsetzen, erhalten wir den gesuchten Limes.

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2x-1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{-2-1}{1+2+2+1} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

b) Da wir beim Einsetzen mit 1 durch 0 dividieren und somit eine unbestimmte Form erhalten, heben wir die größte Potenz des Nenners heraus:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{17}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

2 - Beispiel 206

Man berechne den Grenzwert nachstehender unbestimmter Form:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

Definiton - Regel von de l'Hospital: Seien die Funktionen f und g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Inneren (a, b). Weiters sei $x_0 \in [a, b]$ und gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ferner sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (bzw. der einseitige Grenzwert, falls $x_0 = a$ oder $x_0 = b$). Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wir sehen, dass es sich um eine unbestimmte Form $('\frac{0}{0}')$ handelt. Die Regel von de l'Hospital können wir noch nicht direkt anwenden - wir formen dementsprechend um:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x x}$$

Wir sehen uns nun den Grenzwert des Exponenten an, das heißt, wir schauen, "gegen was" der Exponent konvergiert.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Hierbei handelt es sich wieder um eine unbestimmte Form, nämlich $\frac{-\infty}{\infty}$. Dieses Mal aber können wir den Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{1} = -\frac{0}{1} = 0$$

3 - Beispiel 220

Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C$$

und berechne damit

$$\int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Anmerkung - Substitutionsregel: $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$

Wir wissen, dass $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$. Dies können wir ausnutzen, um somit den Weg für die Substitutionsregel zu bereiten - setzen wir also für das $f(x)$ aus der Regel $\frac{1}{x}$ ein:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \ln |u(x)| + C$$

Der Beweis ist nun also abgeschlossen. Berechnen wir damit nun $\int \frac{dx}{x \ln x}$. Wir formen nun so um, damit wir vorher berechnete Beziehung nutzen können:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

Wir haben es nun auf dieselbe Form wie obige Beziehung gebracht. Man beachte hierbei, dass $u(x) = \ln x$ und $u'(x) = \frac{1}{x}$ gilt. Folglich können wir es auf die Form $\ln |u(x)| + C$ bringen:

$$\ln |u(x)| + C = \ln |\ln x| + C$$

4 - Beispiel 223

Sei $I_n(x) := \int (1+x^2)^{-n} dx (n = 1, 2, 3, \dots)$. Durch partielle Integration zeige man die Rekursion

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n(x) + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

Mit Hilfe dieser Formel berechne man $I_3(x)$ (beachte $I_1(x) = \arctan(x) + C$).

Anmerkung - Partielle Integration: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Wir werden die partielle Integration folgendermaßen anwenden:

$$\int \underbrace{(1+x^2)^{-n}}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} dx$$

Hierbei gilt dann, dass $g(x) = x + C$ und ...

$$f'(x) = \overbrace{(1+x^2)^{-n}}^{Kettenr.}$$

$$f'(x) = (-n)(x^2+1)^{-n-1}(x^2+1)'$$

$$f'(x) = -(x^2+1)^{-n-1}2nx$$

$$f'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Wenden wir nun die partielle Integration an.

$$\frac{1}{(1+x^2)^n}x - \int \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} x dx$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

Wir formen konsequent so um, sodass wir es auf die gewünschte Form bringen.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{x^2-1+1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$\int \frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^{\cancel{n+1}}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

Nun nutzen wir die Linearität des Integrals aus und erhalten:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}$$

Das setzen wir in unserer ursprünglichen Gleichung ein.

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \qquad | + 2nI_{n+1} - I_n$$

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n \qquad | \div 2n$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

Dies ist äquivalent zum I_{n+1} in unserer Angabe, somit haben wir die rekursive Gleichung bewiesen. Nun nutzen wir dies, um I_3 zu berechnen.

$$I_2 = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + C$$

$$I_3 = \frac{4-1}{4} I_2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} + C$$

$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} + C$$

5 - Beispiel 234

Man berechne:

$$\int \frac{x^3+x^2+7}{x^3-3x+2}dx$$

Falsch abgeschrieben! Lasse die Lösung für Übungszwecke trotzdem da ;)

Wir vereinfachen den Bruch zuerst, bevor wir ihn erfolgreich integrieren können. Dafür nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Da sowohl Zähler- als auch Nennerfunktionen denselben Grad haben, handelt es sich um eine unecht gebrochene Funktion - wir führen also eine Polynomdivision durch.

$\underbrace{x^3}_{-x^3} + x^2 + \underbrace{0x+7}_{+3x-2} \div x^3 - 3x + 2 = 1$
Rest: $x^2 - 3x + 5$

$1 + \frac{x^2+3x+5}{x^3-3x+2}$

Im Folgenden betrachten wir die Nullstellen des Nenners. Durch systematisches Raten erhalten wir die Nullstelle $x_1 = 1$. Dies nutzen wir in einer Polynomdivision, um eine quadratische Gleichung erhalten zu können.

$\underbrace{x^3+0x^2}_{-x^3+x^2} - 3x + 2 \div x - 1 = x^2$
$\underbrace{x^2-3x}_{-x^2+x} + 2 \div x - 1 = x^2 + x$
$\underbrace{-2x+2}_{+2x-2} \div x - 1 = x^2 + x - 2$
Rest: 0

Wir nutzen nun die erhaltene quadratische Gleichung, um die restlichen Nullstellen zu erhalten.

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$
$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

Wir haben nun eine einfache und eine *doppelte* Nullstelle erhalten. Wir wissen, dass für einfache Nullstellen $\frac{A}{x-x_1}$ und für doppelte Nullstellen $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$ gilt. Wir setzen also ein:

$$\frac{x^2+3x+5}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \qquad | \cdot (x+2)(x-1)^2$$
$$x^2 + 3x + 5 = (x-1)^2A + (x+2)(x-1)B + (x+2)C$$

$$x^2 + 3x + 5 = (A + B)x^2 + (-2A + B + C)x + (A - 2B + 2C)$$

Anhand eines Koeffizientenvergleiches können wir nun ein lineares Gleichungssystem aufstellen, um A, B und C zu berechnen.

(I): $A - 2B + C = 5$

(II): $-2A + B + C = 3$

(III): $A + B = 1$

Wir erhalten $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$ und $C = 3$. Wir setzen dies in unsere ursprüngliche Gleichung ein.

$$\frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + 1$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int 1dx$$

Hierbei nutzen wir nun die lineare Eigenschaft des Integrierens und berechnen die Integrale separat.

(i) ad $\int \frac{1}{x+2}dx$
Wir substituieren mit $u = x+2$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u}du = \ln u$. Wir resubstituieren und erhalten $\ln(x+2)$.

(ii) ad $\int \frac{1}{x-1}dx$
Wir substituieren mit $u = x-1$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u}du = \ln u$. Wir resubstituieren und erhalten $\ln(x-1)$.

(iii) ad $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$
Wir substituieren mit $u = x-1$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = -u^{-1} = -\frac{1}{u}$. Wir resubstituieren und erhalten $-\frac{1}{x-1}$.

(iv) ad $\int 1dx = x$

Nun können wir all dies in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Achtung ist geboten bei dem Logarithmus - da dieser für $x \leq 0$ undefiniert ist, setzen wir Betragsstriche. Wir erhalten unser Resultat:

$$\frac{\ln|x+2|}{3} + \frac{2\ln|x-1|}{3} - \frac{3}{x-1} + x + C$$

Nun zur ECHTEN Aufgabe, welche prinzipiell ganz analog funktioniert:

Man berechne:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^3 - 3x + 2} dx$$

Wir vereinfachen den Bruch zuerst, bevor wir ihn erfolgreich integrieren können. Dafür nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Da sowohl Zähler- als auch Nennerfunktionen denselben Grad haben, handelt es sich um eine unecht gebrochene Funktion - wir führen also eine Polynomdivision durch.

$\underbrace{x^3}_{-x^3} - x^2 + \underbrace{0x + 2}_{+3x-2} \div x^3 - 3x + 2 = 1$

Rest: $3x - x^2$

$1 + \frac{3x - x^2}{x^3 - 3x + 2}$

Im Folgenden betrachten wir die Nullstellen des Nenners. Durch systematisches Raten erhalten wir die Nullstelle $x_1 = 1$. Dies nutzen wir in einer Polynomdivision, um eine quadratische Gleichung erhalten zu können.

$\underbrace{x^3 + 0x^2}_{-x^3+x^2} - 3x + 2 \div x - 1 = x^2$

$\underbrace{x^2 - 3x}_{-x^2+x} + 2 \div x - 1 = x^2 + x$

$\underbrace{-2x + 2}_{+2x-2} \div x - 1 = x^2 + x - 2$

Rest: 0

Wir nutzen nun die erhaltene quadratische Gleichung, um die restlichen Nullstellen zu erhalten.

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$
$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

Wir haben nun eine einfache und eine *doppelte* Nullstelle erhalten. Wir wissen, dass für einfache Nullstellen $\frac{A}{x - x_1}$ und für doppelte Nullstellen $\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$ gilt. Wir setzen also ein:

$$\frac{3x - x^2}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \qquad | \cdot (x + 2)(x - 1)^2$$
$$3x - x^2 = (x - 1)^2 A + (x + 2)(x - 1)B + (x + 2)C$$
$$3x - x^2 = (A + B)x^2 + (-2A + B + C)x + (A - 2B + 2C)$$

Anhand eines Koeffizientenvergleiches können wir nun ein lineares Gleichungssystem aufstellen, um A, B und C zu berechnen.

(I): $A - 2B + C = 0$

(II): $-2A + B + C = 3$

(III): $A + B = -1$

Wir erhalten $A = -\frac{10}{9}$, $B = \frac{1}{9}$ und $C = \frac{2}{3}$. Wir setzen dies in unsere ursprüngliche Gleichung ein.

$$\frac{-\frac{10}{9}}{x+2} + \frac{\frac{1}{9}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2} + 1$$

$$-\frac{10}{9}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int 1dx$$

Hierbei nutzen wir nun die lineare Eigenschaft des Integrierens und berechnen die Integrale separat.

(i) ad $\int \frac{1}{x+2}dx$
Wir substituieren mit $u = x+2$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u}du = \ln u$. Wir resubstituieren und erhalten $\ln(x+2)$.

(ii) ad $\int \frac{1}{x-1}dx$
Wir substituieren mit $u = x-1$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u}du = \ln u$. Wir resubstituieren und erhalten $\ln(x-1)$.

(iii) ad $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$
Wir substituieren mit $u = x-1$, wobei $\frac{du}{dx} = 1 = u'(x)$ und folglich $dx = du$. Somit ergibt sich $\int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = -u^{-1} = -\frac{1}{u}$. Wir resubstituieren und erhalten $-\frac{1}{x-1}$.

(iv) ad $\int 1dx = x$

Nun können wir all dies in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Achtung ist geboten bei dem Logarithmus - da dieser für $x \leq 0$ undefiniert ist, setzen wir Betragsstriche. Wir erhalten unser Resultat:

$$-\frac{10\ln|x+2|}{9} + \frac{\ln|x-1|}{9} - \frac{2}{3x-3} + x + C$$

6 - Beispiel 243

Man berechne:

$$\int x(\ln x)^2 dx$$

Zuerst integrieren wir partiell, wobei $f(x) = (\ln x)^2$ mit $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ und $g'(x) = x$ mit $g = \frac{x^2}{2}$:

$$\frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int x \ln x dx$$

Nun beschäftigen wir uns mit $\int x \ln x dx$ und integrieren partiell, wobei $f(x) = \ln x$ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = x$ mit $g = \frac{x^2}{2}$:

$$\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx$$

Dieses integral können wir nun einfach lösen, da es sich aufgrund der Linearität des Integrals nur um $\int \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$ handelt. Dies setzen wir nun wieder ein und erhalten die Lösung:

$$\frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$