

Analysis für Informatik und WI - UE-Test 1 - Gruppe Q, V1

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [3 Punkte]

- (a) Man formuliere allgemein das Sandwich-Theorem für den Beweis der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.
 (b) Wir betrachten nun konkret die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit

$$a_n = \sum_{j=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + j} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 2n}.$$

Indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$ ermittle, mit $b_n \leq a_n \leq c_n$, für fast alle n , bestimme man unter Verwendung des Sandwich-Theorems den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ dieser Folge.

(2) [3 Punkte] Wir betrachten nachfolgend die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

- (a) Man bestimme den Konvergenzradius R der angegebenen Potenzreihe.
 (b) Für die beiden Randpunkte auf dem Konvergenzintervall, also jene reellen x mit $|x - x_0| = R$, ermittle man jeweils unter Verwendung geeigneter Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten der Reihe.

3

(3) [2 Punkte = Anzahl der korrekten in Tabelle eingefügten Antworten]

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit

$$a_n = (-1)^n + \frac{(1 - (-1)^n) \cdot n^2}{n + 1}.$$

Ermitteln Sie den Limes superior sowie den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und fügen Sie das Ergebnis in nachfolgende Tabelle ein.

Achtung: Es zählt hier nur das in die Tabelle eingefügte Ergebnis, allfällige auf dem Blatt angegebene Nebenrechnungen, etc. werden nicht gewertet.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

(1) [3 Punkte]

- (a) Man formuliere allgemein das Sandwich-Theorem für den Beweis der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.
 (b) Wir betrachten nun konkret die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit

$$a_n = \sum_{j=1}^{3n} \frac{n}{n^2 + j} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 3n}.$$

Indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$ ermittle, mit $b_n \leq a_n \leq c_n$, für fast alle n , bestimme man unter Verwendung des Sandwich-Theorems den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ dieser Folge.

(2) [3 Punkte] Wir betrachten nachfolgend die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

- (a) Man bestimme den Konvergenzradius R der angegebenen Potenzreihe.
 (b) Für die beiden Randpunkte auf dem Konvergenzintervall, also jene reellen x mit $|x - x_0| = R$, ermittle man jeweils unter Verwendung geeigneter Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten der Reihe.

(3) [2 Punkte = Anzahl der korrekten in Tabelle eingefügten Antworten]

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit

$$a_n = (-1)^n - \frac{(1 + (-1)^n) \cdot n^2}{n + 1}.$$

Ermitteln Sie den Limes superior sowie den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und fügen Sie das Ergebnis in nachfolgende Tabelle ein.

Achtung: Es zählt hier nur das in die Tabelle eingefügte Ergebnis, allfällige auf dem Blatt angegebene Nebenrechnungen, etc. werden nicht gewertet.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n =$
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n =$

- (1) [3 Punkte] Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{n^2 - k^2}}$$

bestimmen, wobei Sie wie nachfolgend beschrieben vorgehen sollen.

- (a) Interpretieren Sie $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ als Riemannsche Zwischensumme eines (uneigentlichen) Integrals, d.h., ermitteln Sie den Integranden $f(x)$, sowie die Integrationsgrenzen a, b , sodass S_n Riemannsche Zwischensumme von $\int_a^b f(x) dx$ ist.
- (b) Berechnen Sie das in (a) ermittelte Integral und bestimmen Sie somit den gesuchten Grenzwert via

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \int_a^b f(x) dx.$$

Hinweis: Man beachte $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, für $x \in (-1, 1)$.

- (2) [3 Punkte] Wir betrachten die reelle Funktion $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{\ln x}{x},$$

sowie den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

- (a) Man bestimme die lineare Approximation, also das Taylor-Polynom 1. Ordnung $T_1(x)$, von $g(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
- (b) Man gebe für die betrachtete Funktion g die in der Lehrveranstaltung kennengelernte Darstellung für das Restglied $R_1(x)$ in der Taylorschen Formel

$$g(x) = T_1(x) + R_1(x)$$

an, also das "Restglied von Lagrange".

- (c) Man bestimme die quadratische Approximation, also das Taylor-Polynom 2. Ordnung $T_2(x)$, von $g(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(3) [2 Punkte = Anzahl richtiger Antworten in Tabelle]

Aufgabe		Antwort
(a)	$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1), \quad \vec{v} = \left\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\ ^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
(b)	$\max_{\ \vec{w}\ =1} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 1)$	

Berechnen Sie nachfolgend zuerst die gesuchten Richtungsableitungen und tragen Sie dann das **Ergebnis in obige Tabelle** ein. Bewertet wird in dieser Aufgabe lediglich das in obige Tabelle eingetragene Ergebnis, aber selbstverständlich können und sollen Sie Nebenrechnungen oder -überlegungen machen (gehen aber nicht in die Bewertung ein).

Wir betrachten die bivariate reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 y^4.$$

Gesucht sind die nachfolgend angegebenen Richtungsableitungen an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(a) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$ in Richtung des normierten Richtungsvektors

$$\vec{v} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}.$$

(b) Die Richtungsableitung in Richtung des größten Anstiegs, also das Maximum

$$\max_{\|\vec{w}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 1).$$

(1) [3 Punkte] Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$$

bestimmen, wobei Sie wie nachfolgend beschrieben vorgehen sollen.

- (a) Interpretieren Sie $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ als Riemannsche Zwischensumme eines (uneigentlichen) Integrals, d.h., ermitteln Sie den Integranden $f(x)$, sowie die Integrationsgrenzen a, b , sodass S_n Riemannsche Zwischensumme von $\int_a^b f(x) dx$ ist.
- (b) Berechnen Sie das in (a) ermittelte Integral und bestimmen Sie somit den gesuchten Grenzwert via

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \int_a^b f(x) dx.$$

Hinweis: Man beachte $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, für $x \in (-1, 1)$.

(2) [3 Punkte] Wir betrachten die reelle Funktion $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x},$$

sowie den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

- (a) Man bestimme die lineare Approximation, also das Taylor-Polynom 1. Ordnung $T_1(x)$, von $g(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
- (b) Man gebe für die betrachtete Funktion g die in der Lehrveranstaltung kennengelernte Darstellung für das Restglied $R_1(x)$ in der Taylorschen Formel

$$g(x) = T_1(x) + R_1(x)$$

an, also das "Restglied von Lagrange".

- (c) Man bestimme die quadratische Approximation, also das Taylor-Polynom 2. Ordnung $T_2(x)$, von $g(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(3) [2 Punkte = Anzahl richtiger Antworten in Tabelle]

Aufgabe		Antwort
(a)	$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1), \quad \vec{v} = \left\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\ ^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
(b)	$\max_{\ \vec{w}\ =1} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 1)$	

6

Berechnen Sie nachfolgend zuerst die gesuchten Richtungsableitungen und tragen Sie dann das **Ergebnis in obige Tabelle** ein. Bewertet wird in dieser Aufgabe lediglich das in obige Tabelle eingetragene Ergebnis, aber selbstverständlich können und sollen Sie Nebenrechnungen oder -überlegungen machen (gehen aber nicht in die Bewertung ein).

Wir betrachten die bivariate reelle Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^4 y^3.$$

Gesucht sind die nachfolgend angegebenen Richtungsableitungen an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(a) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$ in Richtung des normierten Richtungsvektors

$$\vec{v} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}.$$

(b) Die Richtungsableitung in Richtung des größten Anstiegs, also das Maximum

$$\max_{\|\vec{w}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 1).$$