Zum ersten Übungstest kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.

1 Definition von Konvergenz

Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge a_n sind äquivalent zu "a_n ist konvergent" (in $\mathbb{R}$)?

Dazu können Eigenschaften der Form "Q l R r" abgefragt werden, wobei es folgende Möglichkeiten gibt:

Q	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \geq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \neq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 1)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M+1)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n > M)$,
	$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\exists n > M)$,
l	$\lvert a_n - a\rvert$,
	$\lvert a - a_n\rvert$,
	$a_n - a$,
	$a - a_n$
R	$<$,
	$\leq$,
	$>$
r	ε,
	$\varepsilon + 1$,
	ε^2,
	$\frac{\varepsilon}{2}$,
	$\sqrt{\varepsilon}$;

Ebenfalls gefragt werden können Cauchyfolgen-Varianten, d.h., "Q l R r" mit R und r wie oben, und:

Q	$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n, m > M)$
	$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall M)\,(\exists n, m > M)$
	$(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n, m > M)$
l	$\lvert a_n - a_m\rvert$,
	$\lvert a_m - a_n\rvert$,
	$a_n - a_m$,
	$a_m - a_n$

Beispiel: Q sei $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$ und l sei $a_n - a$ und R sei $>$ und r sei ε^2; dann ergibt sich die Frage:

> Ist folgende Aussage äquivalent zu "a_n ist konvergent:" $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)\, a_n - a > \varepsilon^2$.

Formal sind das also 660 "verschiedene" Fragen.

Hinweise: Das sollte alles offensichtlich sein; beachte allerdings folgende möglicherweise überraschende Kombinationen:
$\ldots(\forall\varepsilon \neq 0)\cdots < \varepsilon^2$
$\ldots(\forall n, m > M)\ldots a_n - a_m < \varepsilon$ (ohne Betrag-Striche!)

Bemerkung (Keine Prüfungsfrage)

Was ist mit $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall n > M)|a - a_n| < \varepsilon$? (Hinweis: das schaut zwar ganz falsch aus, funktioniert aber, siehe Cauchyfolgen)

2 Konvergenz

Gib für folgende Folgen a_n und für allgemeines $\varepsilon > 0$ ein M an mit $(\forall n > M)\,|a_n| < \varepsilon$

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(d) $a_n = 0$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(f) $a_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$

3 Logik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ, ψ, für beliebige Menge A)

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt "wenn dann" bzw "impliziert"; $\leftrightarrow$ heißt "gdw", $\wedge$ heißt "und", $\vee$ "oder" und $\neg$ "nicht".

(a) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$.

(b) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$.

(c) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$.

(d) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\varphi \to \neg\psi$.

(e) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\psi \to \neg\varphi$.

(f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ impliziert $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.

Und dieselben Fragen <u>nochmals für "gdw" statt "impliziert"</u>.

4 Ordnungen, Vollständigkeit

Welche der folgenden Aussagen gilt in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:

(a) Jede Teilmenge hat ein Minimum.

(b) Jede Teilmenge hat ein Maximum.

(c) Jede beschränkte Teilmenge hat ein Minimum.

(d) Jede beschränkte Teilmenge hat ein Maximum.

(e) Jede Teilmenge hat ein Infimum.

(f) Jede Teilmenge hat ein Supremum.

(g) Jede beschränkte Teilmenge hat ein Infimum.

(h) Jede beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

5 Bruchrechnen

Welche der folgenden Brüche stellen die gleiche Zahl dar:

(a) $\frac{3}{\frac{5}{2}}$

(b) $\frac{2}{\frac{2}{4}}$

(c) $\frac{2}{\frac{4}{2}}$

(d) $\frac{2}{\frac{1}{2}}$

(e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

(f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(g) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

(h) $\frac{5}{6}$

(i) $\frac{6}{5}$

(j) $\frac{2}{3}$

(k) $\frac{3}{2}$

(l) $\frac{1}{\frac{6}{5}}$

(m) 1

(n) 4

(Allenfalls gefragt in der Form: Welche der folgenden Brüche sind gleich X, wobei X einer der Einträge ist, z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$.)

6 Wachtumsraten

Ordne die folgenden Folgen nach Ihrer Wachstumsrate ($\ll$), wobei $k > 1$

(a) $\log n$

(b) $\sqrt[k]{n}$

(c) $\sqrt{n}$

(d) $\sqrt{n}$

(e) n

(f) $n \log(n)$

(g) n^k

(h) 2^n

(Allenfalls gefragt in der Form: Gilt $\log(n) \ll n^k$ etc, das sind dann 56 "verschiedene" Fragen.)

7 Arithmetik mit Limiten

Wir setzen voraus dass die Folge a_n konvergiert und die dazugehörige Reihe konvergiert, und dasselbe für b_n. Was gilt dann allgemein:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

(e) a_n hat einen Häufungspunkt

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

8 Konvergenzkriterien

Sei a_n eine Folge. Was gilt allgemein: (Alternierend heißt dass a_n abwechselnd ≥ 0 und ≤ 0 ist.)

(a) Wenn a_n beschränkt ist, dann konvergiert a_n.

(b) Wenn a_n beschränkt ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(c) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann konvergiert a_n.

(d) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(e) Wenn a_n einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n.

(f) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n einen Häufungspunkt.

(g) Wenn a_n genau einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n.

(h) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n genau einen Häufungspunkt.

(i) Wenn a_n konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(j) Wenn a_n eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(k) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert a_n.

(l) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann is a_n eine Nullfolge.

(m) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(n) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(o) Wenn a_n alternierend ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(p) Wenn a_n alternierend und eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(q) Wenn a_n alternierend ist und $|a_n|$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

9 Mehr Konvergenz

Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Was gilt dann allgemein:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot a_n$ konvergiert.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

10 Limiten von rationalen Funktionen

Konvergieren folgende Folgen? Wenn ja, was ist der Limes? Wenn nein, gehen sie nach unendlich? Oder nach minus unendlich? (Oder natürlich: Weder noch?)

(a) $\frac{3n^2+7n}{6n^2+1}$

(b) $\frac{3n^2+7n}{6n+1}$

(c) $\frac{3n^2+7n}{6n^3+1}$

(d) $\frac{17n^4+1}{17n^4-1}$

(e) $\frac{17n^4+1}{17n^3-1}$

(f) $\frac{17n^4+1}{17n^6-1}$

11 Mengenschreibweise

Welche der Folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen wir hier mit (a, b) etc reelle Intervalle, und $\langle a, b\rangle$ das geordnete Paar.

(a) $\langle 2, 3\rangle = \langle 3, 2\rangle$

(b) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

(c) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$

(d) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3]$

(e) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3)$

(f) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

(g) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3] \setminus \{2\}$

(h) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

12 Abzählbarkeit

Welche der folgenden Mengen ist abzählbar:

(a) $\emptyset$

(b) $\{7, 12, 22\}$

(c) $\{8, 13, 23\}$

(d) $\mathbb{N}$

(e) $\mathbb{N}_0$

(f) $\mathbb{Z}$

(g) $\mathbb{Q}$

(h) $\mathbb{R}$

(i) Das Intervall $(0, 1)$

(j) Das Intervall $(2, \infty)$

Kann auch gefragt werden: Welche Mengen haben dieselbe Kardinalität wie X, wobei X eine der Beispiele ist, z.B. $\mathbb{Z}$.

Kann auch gefragt werden als: Ordne folgende Mengen Ihrer Kardinalität nach, beginnend mit der kleinsten.

13 Rationale Zahlen

Welche der folgenden Zahlen ist in $\mathbb{Q}$ (Periodische Zahlen notieren wir zB als $0.23\overline{25}$):

(a) $0,23\overline{762375}\ldots$

(b) $0,101\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}1\underbrace{0000}_{4}1\ldots$

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{4}$

(e) 2π

(f) $\frac{92835}{7235} + \frac{1}{10^{51}-1}$