

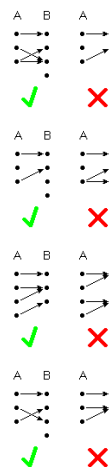
Relationen

Eine **binäre Relation zwischen** A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$.

$$R \subseteq A \times B \wedge (a, b) \in R \quad aRb$$

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heisst

- linkstotal** zu jedem $a \in A$ mindestens ein $b \in B$
 $\forall a \in A \exists b \in B : f(a) = b$
- rechtseindeutig** zu jedem $a \in A$ höchstens ein $b \in B$
 $\forall b_1, b_2 \in B : f(a) = b_1 \wedge f(a) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$
- rechtstotal** zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$
 $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$
- linkseindeutig** zu jedem $b \in B$ höchstens ein $a \in A$
 $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$



Wenn $A=B$ spricht man von einer **binären Relation auf** A.

Sei R eine binäre Relation auf A, dann heisst R

- (R) reflexiv** wenn $\forall a \in A : aRa$
- (S) symmetrisch** wenn $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$
- (A) antisymmetrisch** wenn $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$
- (T) transitiv** wenn $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Äquivalenzrelation (R), (S), (T)

Äquivalenzrelationen auf einer Menge A bewirken eine Klasseneinteilung (Partition) von A, das heisst eine Zerlegung von A in paarweise disjunkte Mengen.

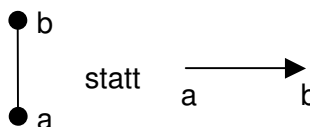
Unter einer Partition einer Menge A versteht man ein System von Teilmengen $\{K_i \mid i \in I\}$ mit den Eigenschaften:

- $\forall i \in I : K_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in I \wedge i \neq j : K_i \cap K_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} K_i = A$

Beispiel: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$
 $\mathbb{Z} = \{\overline{0} \cup \overline{1} \cup \dots \cup \overline{m-1}\}$ Restklassenzerlegung von $\mathbb{Z}$

Halbordnungsrelation (R), (A), (T)

Darstellung durch das **Hasse-Diagramm**



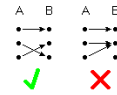
Abbildung

Relationen, die **linkstotal** sind heissen **partielle Abbildungen**, wenn sie außerdem **rechtseindeutig** sind heissen sie Abbildungen (Funktionen). Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Wertemenge zu.

$$R \subseteq A \times B \quad f: A \rightarrow B$$

Eine Funktion heisst

- surjektiv** wenn sie **rechtstotal**,
- injektiv** wenn sie **linkseindeutig**,
- bijektiv** wenn sie **rechtstotal und linkseindeutig** ist.



Algebraische Strukturen

Eine **zweistellige Operation** $\circ$ in M ist eine Verknüpfung, die jedem Paar $(a, b) \in M \times M$ genau ein Element $a \circ b$ zuordnet, also eine **Abbildung** $\circ: M \times M \rightarrow M$.

$$\langle M, \circ \rangle \quad \text{Gruppoid}$$

Sei $\circ$ eine zweistellige Operation, dann ist $\circ$

$$\begin{array}{ll} \text{assoziativ} & \text{wenn } \forall a, b, c \in M: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \\ \text{kommutativ} & \text{wenn } \forall a, b \in M: a \circ b = b \circ a \end{array}$$

$$\langle M, \circ \rangle \quad \text{(kommutative) Halbgruppe}$$

Existiert ein **neutrales Element** e : $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in M$

$$\langle M, \cdot \rangle \quad \text{(kommutatives) Monoid}$$

Existieren **inverse Elemente** a' : $a \circ a' = a' \circ a = e$

$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \quad \text{(kommutative = abelsche) Gruppe}$$

Gruppentheorie

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ heisst **Untergruppe** der Gruppe $\langle G, \circ, e \rangle$, falls $\langle U, \circ, e \rangle$ selbst eine Gruppe ist:

$$U \leq G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U \\ e \in U \\ a \in U \Rightarrow a' \in U \end{array} \right\} \Leftrightarrow a, b \in U \Rightarrow a \circ b' \in U$$

Untergruppenkriterium

Es sei $\langle G, \circ, e \rangle$ eine Gruppe und $U \leq G$. Dann nennt man zu jedem $g \in G$ die Menge

$$\begin{array}{ll} g \circ U = \{ g \circ u \mid u \in U \} & \text{die zu } g \text{ gehörende Linksnebenklasse (LNK) von } U \text{ in } G \\ U \circ g = \{ u \circ g \mid u \in U \} & \text{die zu } g \text{ gehörende Rechtsnebenklasse (RNK) von } U \text{ in } G. \end{array}$$

bei abelschen Gruppen: $\text{LNK} = \text{RNK}$.

Nebenklassenzerlegung einer Gruppe

- Die Menge aller LNK $K_L = \{ gU \mid g \in G \}$ bildet eine Partition von G , genannt Linksnebenklassenzerlegung von G nach U (analog RNK).
- Alle Nebenklassen sind gleich mächtig. $\forall g \in G: |gU| = |Ug| = |U|$
- Die Anzahl aller LNK stimmt mit jener der RNK überein, diese Zahl wird Index $|G:U|$ von G nach U genannt.

Satz von Lagrange

Ist G eine endliche Gruppe und $U \leq G$, dann ist die Ordnung (Mächtigkeit) $|U|$ jeder Untergruppe stets Teiler der Gruppenordnung. $|G| = |G:U| \cdot |U|$

Ringe und Körper

Es sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen, einer Addition $+$ und einer Multiplikation.

$\langle R, +, \cdot \rangle$ heisst **Ring**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $\langle R, + \rangle$ ist eine abelsche Gruppe,
- $\cdot$ ist linksdistributiv bezüglich $+$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \square \quad a, b, c \in R$
- $\cdot$ ist rechtsdistributiv bezüglich $+$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \square \quad a, b, c \in R$
- und $\langle R, \cdot \rangle$ ist eine Halbgruppe.

kommutativer Ring

$\langle R, \cdot \rangle$ kommutativ

unitärer Ring (mit Einselement)

$\langle R, \cdot \rangle$ ein Monoid

Integritätsring

$\langle R, +, \cdot \rangle$ unitärer kommutativer Ring ohne Nullteiler
d.h. keine $a, b \in R \mid a \neq b, b \neq 0, ab = 0$

Körper

$\langle R, +, \cdot \rangle$ kommutativer Ring, $\langle K \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ Gruppe
d.h. $\forall x \in K \setminus \{0\} \exists x^{-1} \mid x \cdot x^{-1} = 1$

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A(a_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \text{ Spaltenindex} \\ j = 1, \dots, m \text{ Zeilenindex} \end{array}$$

quadratische Matrix (n×n)

Zeilenanzahl gleich Spaltenanzahl

symmetrische Matrix

gespiegelt an Hauptdiagonale

Diagonalmatrix

alles außer Hauptdiagonale 0

Einheitsmatrix

Diagonalmatrix, alles in Hauptdiagonale 1

obere / untere Dreiecksmatrix

unter / ober Hauptdiagonale alles 0

Addition

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M_{m,n} \Rightarrow A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in M_{m,n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$A = (a_{i,j}), \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})$$

Multiplikation von Matrizen

(assoziativ, aber nicht kommutativ)

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}, B = (b_{jk}) \in M_{n,p} \Rightarrow A \cdot B = C = (c_{ik}) \in M_{m,p}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}$$

$$\begin{array}{c} \text{Falk-Schema} \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \right. = B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Transposition von Matrizen

$$A^T = (a_{i,j})^T = (a_{j,i}) \quad A^T \dots \text{transponierte Matrix}$$

Rechengesetze

$$\langle M_{m,n}(\mathbf{R}), + \rangle: \quad \text{abelsche Gruppe mit neutralem Element } 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und inversem Element $-A = (-1) \cdot A$

$$\langle M_{m,n}(\mathbf{R}), +, \cdot \rangle: \quad \text{unitärer Ring mit neutralem Element } E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (A^T)^T = A$$

Determinanten

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ - Matrix über $\mathbb{R}$, dann ist die Determinante $|A|$ abhängig von n :

$$n = 1: |A| = a_{11}$$

$$n = 2: |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$n = 3: |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Regel von Sarrus

Entwicklungssatz von Laplace

Eine Determinante kann nach jeder beliebigen Spalte oder Zeile entwickelt werden:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A_{ij}| \quad (-1)^{i+j} \text{ liefert ein Schachbrettvorzeichen: } \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ - Untermatrix ist, die aus A durch Streichung der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht.

Eigenschaften

- Vertauscht man zwei Zeilen (oder zwei Spalten) der Matrix, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit einem konstanten Faktor, so multipliziert sich die Determinante mit diesem Faktor.
- Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich die Determinante nicht.
- Für transponierte Matrizen gilt $|A^T| = |A|$, für das Produkt von Matrizen gilt $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Invertieren von Matrizen

Zu allen $n \times n$ Matrizen A , deren Determinanten $|A| \neq 0$, existiert eine inverse Matrix A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$$

Kombinatorik

Wir betrachten verschiedene Möglichkeiten, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen.

Variationen

Geordnete Auswahl, d.h. Reihenfolge wird beachtet.

Ohne Wiederholung:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2)$$

... Anzahl der 3-buchstabigen Wörter, die aus $\{a, b, c, d, e\}$ gebildet werden können, wenn jeder Buchstabe nur einmal vorkommen darf

Mit Wiederholung (k-Tupel):

$${}^wV_n^k = n^k$$

$$5^3$$

... Anzahl der 3-buchstabigen Wörter, die aus $\{a, b, c, d, e\}$ gebildet werden können

Kombinationen

Ungeordnete Auswahl, d.h. Reihenfolge wird nicht beachtet.

Ohne Wiederholung (Menge):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{6!(45-6)!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6}$$

... Anzahl der möglichen Lottotips 6 aus 45

Mit Wiederholung (Multiset):

$${}^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

... Anzahl der verschiedenen Würfe, die mit 3 Würfeln möglich sind

Permutationen

Anordnung d.h. nur die Reihenfolge ist relevant

Ohne Wiederholung:

$$P_n = n!$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

... Anzahl der Anordnungen von 3 Buchstaben, wenn jeder Buchstabe nur einmal vorkommen darf

Mit Wiederholung:

$$P_n^k = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

$$P_n^k = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}$$

... Anzahl der 8-stelligen Dezimalzahlen, bei der die Ziffer 1 genau dreimal, die Ziffern 2 und 3 je zweimal und die Ziffer 4 genau einmal vorkommen

Schreibweise

$$\pi = (425163) = 1,2,3,4,5,6 \rightarrow 4,2,5,1,6,3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (14)(2)(356) = (14)(36)(35)$$

Vektordarstellung Abbildung Matrizenschreibweise Zyklenschreibweise Produkt von Transpositionen

Fixpunkt
↓