

- 90) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$ (Δ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.
- 91) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \Delta B = A$ (Δ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.
- 92) Sei $f : A \rightarrow B$. Man zeige, daß durch $x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation \equiv auf der Menge A definiert wird.
- 93) Seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf der Menge M . Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Äquivalenzrelation auf M ist.
- 94) Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ und $(\mathcal{T}_0, |)$.
- 95) Sei $mRn \Leftrightarrow |m| \leq |n|$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Ist R eine Halbordnung auf \mathbb{Z} ?
- 96) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ auf der Potenzmenge einer Menge M eine Halbordnung bildet und zeichnen Sie gegebenenfalls das Hassediagramm.
- 97) Für $k, n \in \{1, 3, 4, \dots, 10\}$ sei kRn , falls k ein Teiler von n ist und k und $\frac{n}{k}$ teilerfremd sind. Man untersuche, ob die Relation R eine Halbordnung ist und ermittle gegebenenfalls das Hassediagramm.
- 98) Wie Bsp. 97) für $k, n \in \{2, 3, 4, \dots, 20\}$.
- 99) Seien R_1 und R_2 Halbordnungen auf der Menge M . Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Halbordnung auf M ist.
- 100–102) Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität haben folgende Relationen R auf \mathbb{Z} :
- 100) $mRn \Leftrightarrow m^2 = n^2?$ 101) $mRn \Leftrightarrow m^4 = n^4?$
- 102) $mRn \Leftrightarrow m = n^2?$
- 103) Man zeige: (\mathbb{C}, \preceq) ist Halbordnung mit $z = a + ib \preceq w = c + id$, falls $a < c$ oder $(a = c$ und $b \leq d)$. Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \preceq z_2$ und $z_3 \geq 0$, aber $z_3 z_1 \geq z_3 z_2$ gelten.
- 104) Man zeige: (\mathbb{C}, \preceq) ist Halbordnung mit $z = a + ib \geq w = c + id$, falls $a > c$ oder $(a = c$ und $b \geq d)$. Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \geq z_2$ und $z_3 \leq 0$, aber $z_3 z_1 \geq z_3 z_2$ gelten.
- 105–107) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen $R \subseteq A \times B$ um Funktionen, injektive Funktionen, surjektive Funktionen bzw. bijektive Funktionen handelt.
- 105) $R = \{(x^2, \frac{1}{x^2}) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$, $A = B = \mathbb{R}$.
- 106) Wie 105) jedoch $A = B = \mathbb{R}_+$.
- 107) $R = \{(\log_2 x, x) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$, $A = B = \mathbb{R}$.
- 108) Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ injektive Abbildungen. Man zeige, daß dann auch $h = g \circ f : A \rightarrow C$ injektiv ist. ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)
- 109) Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ surjektive Abbildungen. Man zeige, daß dann auch $h = g \circ f : A \rightarrow C$ surjektiv ist. ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)

- 79) a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$, b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$.
- 80) Man beweise die folgenden Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen:
- (a) $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- (b) $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
- (c) $ac \equiv bc \pmod{m}$, $c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$
- 81) Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1 a_2 \dots a_{12} p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p im EAN-Code so bestimmt, daß
- $$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \dots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \pmod{10}$$
- gilt. Man zeige, daß beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.
- 82) Sei $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ und R binäre Relation auf A definiert durch
- $$aRb \Leftrightarrow a = b \text{ oder } \text{ggT}(a, b) = 2, \forall a, b \in A.$$
- Man gebe explizit die Relation R sowie ihren Graphen G_R an.
- 83) Man untersuche nachstehend angeführte Relationen $R \subseteq M^2$ in Hinblick auf die Eigenschaften $(R), (S), (A)$ und (T) :
- (a) $M =$ Menge aller Einwohner von Wien (Volkszählung 2001), $aRb \Leftrightarrow a$ ist verheiratet mit b
- (b) M wie oben, $aRb \Leftrightarrow a$ ist nicht älter als b
- (c) M wie oben, $aRb \Leftrightarrow a$ ist so groß wie b
- (d) $M = \mathbb{R}$, $aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$
- (e) $M = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n)R(y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \forall i = 1, \dots, n$
- 84) Man zeige, daß durch
- $$aRb \Leftrightarrow 3 \mid a^2 - b^2 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$
- eine Äquivalenzrelation R in der Menge \mathbb{Z} erklärt wird, und bestimme die zugehörige Partition.
- 85–90) Stellen Sie die folgenden Relationen im cartesischen Koordinatensystem und auch als gerichteten Graphen dar und untersuchen Sie weiters, ob eine Äquivalenzrelation vorliegt.
- 85) Die Relation R sei für $m, n \in \{2, 3, 4, 5\}$ definiert durch $mRn \Leftrightarrow m + n$ ungerade oder $m = n$.
- 86) $mRn \Leftrightarrow m + n$ gerade, $m, n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
- 87) $mRn \Leftrightarrow m - n$ ungerade oder $m = n$, $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- 88) $mRn \Leftrightarrow \text{ggT}(m, n) = 1$, $m, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, wobei $\text{ggT}(m, n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.
- 89) $mRn \Leftrightarrow \text{ggT}(m, n) = 2$, $m, n \in \{2, 4, 6, \dots\}$, wobei $\text{ggT}(m, n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

110) Zu den nachstehenden Abbildungen f bzw. g auf der Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$ bestimme man jeweils den zugehörigen Graphen und untersuche die angegebene Zuordnung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- (a) $f(x) = x^2 \pmod{10}$
 (b) $g(x) = x^3 \pmod{10}$

111) Man zeige, daß die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{7\}$ bijektiv ist und bestimme ihre Umkehrfunktion.

$$y = \frac{2x+1}{x-7}$$

112) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zykeldarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1} :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 1 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

113) Sei eine Permutation π von $\{1, 2, \dots, n\}$ in zweizeiliger Darstellung gegeben. Unter der Inversionstafel von π versteht man die Folge (b_1, \dots, b_n) , wobei $b_k \geq 0$ angibt, wieviele größere Zahlen in der zweiten Zeile links vom Element k stehen. Bestimmen Sie für die Permutation π aus Aufgabe 112) die Inversionstafel.

Wie kann man bei Kenntnis der Inversionstafel die Permutation rekonstruieren? Demonstrieren Sie ein geeignetes Verfahren am obigen Beispiel.

114) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zykeldarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1} :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

115) Schreiben Sie die Zykeldarstellung der Permutation π aus Aufgabe 114) so an, daß in jedem Zyklus das kleinste Element an erster Stelle steht, wir nennen es den Zyklenführer, und die Zyklen untereinander nach absteigender Größe ihrer Zyklenführer angeordnet sind. Zeigen Sie, daß man nun die Klammern in der Zykeldarstellung weglassen kann und die Permutation π dennoch rekonstruierbar bleibt (klammernlose Zykeldarstellung).

116)

(a) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (1346)$, $\rho = (134562)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6 . Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$.

(b) Man schreibe die folgenden Permutationen in Zykeldarstellung bzw. als Produkt von Transpositionen, und gebe deren Vorzeichen an:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 9 & 5 & 8 & 1 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

117) Untersuchen Sie, ob π eine Permutation festlegt und geben Sie gegebenenfalls den Graphen, die Zykeldarstellung, sowie die Zykeldarstellung ohne Klammern an:

$$\pi(k) = 4k + 2 \pmod{10}, \quad 0 \leq k \leq 9.$$

118) Man untersuche, ob die Funktionen $f(x) = x^2 \pmod{10}$ bzw. $g(x) = x^3 \pmod{10}$ auf der Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$ bijektiv sind, d.h. Permutationen festlegen!

119) Schreiben Sie π aus Aufgabe 119 als Produkt von Zweierzyklen.

120) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ durch Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

121) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ mit Hilfe der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

122) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 gibt es, bei denen genau 5-mal der Buchstabe a, 14-mal b, 5-mal c, 3-mal d vorkommen und genau einmal e vorkommt?

123) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 23 verschieden große Kugeln so zu färben, daß 9 rot, 5 schwarz, 4 blau, 4 grün sind und eine weiß ist?

124) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 aus den Buchstaben a, b gibt es, die genau 5-mal a enthalten und zwischen je zwei a mindestens 3-mal den Buchstaben b?

125) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 32-bändigen Lexikon genau 7 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens einer im Regal stehen bleiben soll?

126) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 50-bändigen Lexikon genau 6 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens drei im Regal stehen bleiben sollen?

127) Jemand wirft 2n-mal eine Münze. Wieviele verschiedene Spielverläufe gibt es, wenn gleich oft Kopf wie Adler auftreten soll?

128) Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei (voneinander unterscheidbare) Würfel so zu werfen, daß genau zwei dieselbe Augenzahl zeigen?

129) Man bestimme die Anzahl der möglichen Tototips (1, 2, x) bei 12 Spielen und die Anzahl der möglichen richtigen Zehner. (D. h. die Anzahl derjenigen Tips, die mit einer vorgegebenen Kolonne an genau 10 der 12 Stellen übereinstimmen.)

130) Man bestimme die Anzahl der möglichen „6 aus 45“-Lottotips und die Anzahl der möglichen richtigen Vierer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 4 Elemente gemeinsam haben).

131) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben).

132) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer mit Zusatzzahl (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben und deren sechstes Element einen vorgegebenen Wert außerhalb der 6-elementigen Menge hat).

133) Wie viele verschiedene Tips müssen beim Lotto „6 aus 45“ abgegeben werden, um sicher einen Sechser zu erzielen? Wie viele verschiedene Tips sind nötig, um mit Sicherheit mindestens einmal in den Gewinnrängen (d.h. Dreier oder besser) zu sein. Bei wie vielen möglichen Tips stimmt mindestens eine Zahl, bei wie vielen sind alle Zahlen falsch?

134) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie: M besitzt gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl.

135) Wieviele natürliche Zahlen $n < 100\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau dreimal die Ziffer drei?