Beispiel 1) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x - \sin y$ für $x, y \in [0, \pi/2]$.

$$f(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x) - \sin(y)$$

$$f_x = \cos(x+y) + \cos(x)$$

$$f_{xx} = -\sin(x+y) - \sin(x)$$

$$f_{yx} = f_{xy} = -\sin(x+y)$$

$$f_y = \cos(x+y) - \cos(y)$$

$$\nabla f = 0 = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + \cos(x) \\ \cos(x+y) - \cos(y) \end{pmatrix}$$

1) $\cos(x+y) = \cos(y)$

$$x + y = y$$

$$x = 0$$

$$\cos(y) = -\cos(0) = -1$$

$\rightarrow$ $y = \pi + k \cdot 2\pi \rightarrow \notin D$

Randextrema:

$x = 0$ $\quad f(0, y) = \underline{0}$

$y = 0$ $\quad f(x, 0) = 2\sin(x) \rightarrow$ max bei $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{2}$
min bei $x = 0 \rightarrow \underline{0}$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f(\frac{\pi}{2}, y)' = (\cos(y) + 1 - \sin(y))' = 0 = \cos(y) = -\sin(y)$

$\rightarrow y = \frac{3\pi}{4} \notin D$

$y = \frac{\pi}{2}$ $\quad f(x, \frac{\pi}{2}) = (\cos(x) + \sin(x) - 1)' = \sin(x) = \cos(x)$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} \rightarrow f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = 0{,}414$

$H_y T_{p_y}(0, y) = 0$ $\quad H_p(2, 0) = 2$

Beispiel 2) Man finde alle stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 3$ und bestimme daraus die relativen Extrema.

$f_x = 4x - 3z^2$ $\quad f_y = 3y^2 - 3$ $\quad f_z = -6xz + 6z$

$f_{xx} = 4$ $\quad f_{yy} = 6y$ $\quad f_{zz} = -6x + 6$

$x = \frac{3}{4} z^2 \rightarrow x_{1,2} = 1 \quad x_3 = 0$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x - 3z^2 \\ 3y^2 - 3 \\ -6xz + 6z \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow y = \pm 1$

$\rightarrow -\frac{18}{4} z^3 + 6z = z \cdot \left(-\frac{18}{4} z^2 + 6\right) = 0$

$z_1 = 0$

$z_{2,3} = z^2 + \frac{4}{3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$= \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$P_1(0, 1, 0)$, $P_2(0, -1, 0)$, $P_3(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}})$

$P_4(1, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}})$, $P_5(1, -1, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $P_6(1, -1, -\frac{2}{\sqrt{3}})$

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_{xx} = 4 & f_{yx} = 0 & f_{zx} = -6z \\ f_{xy} = 0 & f_{yy} = 6y & f_{zy} = 0 \\ f_{xz} = -6z & f_{yz} = 0 & f_{zz} = -6x + 6 \end{pmatrix} \end{array} = \lambda_1 > 0 \quad \forall i: P_i$$

$\rightarrow$ immer pos. definit nur TP!

λ_3) $4 \cdot (-36xy + 36y) - 6 \cdot 36 z^2 y > 0$

$=$

$2yy > 0$

$v > 0$

$\forall i$: Wenn $y \leq 0$ dann SP

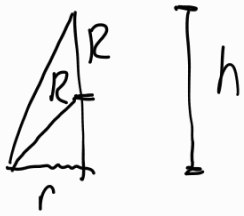
P_2, P_5, P_6 sind SP, da $y \leq 0 \leftrightarrow$ indefinit

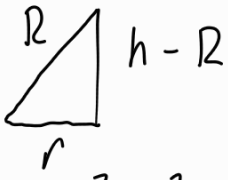
P_1: $4 \cdot 36 > 0$ TP!

P_3: $-6 \cdot 36 \frac{4}{3} > 0$ X SP!

P_4) $-6 \cdot 36 \frac{4}{3} > 0$ X SP!

Beispiel 3) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Drehkegel von maximalem Volumen mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.





$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\rightarrow \quad NB: \; R^2 = (h-R)^2 + r^2 \rightarrow (h-R)^2 + r^2 - R^2 = 0$$

$$\text{optimieren} \rightarrow F(r,h,v) = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \lambda(h^2 - 2hR + r^2)$$

$$F_r = \frac{2}{3}\pi r h - 2r\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi h}{3}$$

$$F_h = \frac{1}{3}\pi r^2 - 2h\lambda + 2R\lambda \rightarrow \quad \lambda = \frac{-\frac{1}{3}\pi r^2}{(-2h+2R)} = \lambda$$

$$F_\lambda = -h^2 + 2hR - r^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{\pi h}{3} = \frac{-\frac{1}{3}\pi r^2}{(-2h+2R)}$$

$$-2\pi h^2 + 2R\pi h = -\pi r^2$$

$$2\pi h^2 - 2R\pi h = \pi r^2$$

$$2h^2 - 2Rh = r^2$$

$$\rightarrow F_\lambda \text{ einsetzen: } -h^2 + 2hR - 2h^2 + 2hR$$

$$-3h^2 + 4hR = 0$$

$$h(\underbrace{-3h + 4R}_{-3h+4R}) = 0$$

$$0 \nearrow$$

$$h = \frac{4}{3}R$$

$$\rightarrow \quad r^2 = 2 \cdot \frac{16}{9}R^2 - 2R^2\frac{4}{3} = \frac{32}{9}R^2 - R^2\frac{8}{3} = \frac{8}{9}R^2$$

$$\rightarrow V(r,h) = V(R) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} R \cdot \frac{8}{9} R^2 \cdot \pi =$$

$$\underline{\underline{\frac{32}{81} R^3 \pi}}$$

Beispiel 4) Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion $f(x, y, z) = x - y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ und $x - y = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x - y + z^2 - \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 2) - \lambda_2 (x - y - 1)$$

$F_x = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 \qquad \lambda_2 = 1 - 2\lambda_1 x$

$F_y = -1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 \qquad \lambda_2 = 1 + 2\lambda_1 y \qquad = y = -x$

$F_z = 2z - 2\lambda_1 z \qquad z = 0$

$F_{\lambda_1} = -x^2 - y^2 - z^2 + 2 \rightarrow -\frac{2}{4} - z^2 + 2 = 0 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} = z$

$F_{\lambda_2} = -x + y + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow x = y + 1$

$z = 0 \rightarrow F_{\lambda_1} \rightarrow$

$F_{\lambda_2} \rightarrow -(y+1)^2 - y^2 + 2 = 0$

$-y^2 - 2y - 1 - y^2 + 2 = 0$

$y^2 + y - \frac{1}{2} = 0$

$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_1 \approx -1.366$

$y_2 \approx 0{,}366$

$P_1)$ $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{4}{4} + \frac{6}{4} = \underline{\frac{10}{4}}$

$P_2)$ $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}) = \underline{\frac{10}{4}}$

max

$P_3)$ $f(1{,}366, 0{,}366, 0) = \underline{1}$

$P_4)$ $f(0{,}366, -1.366, 0) = \underline{1}$

min

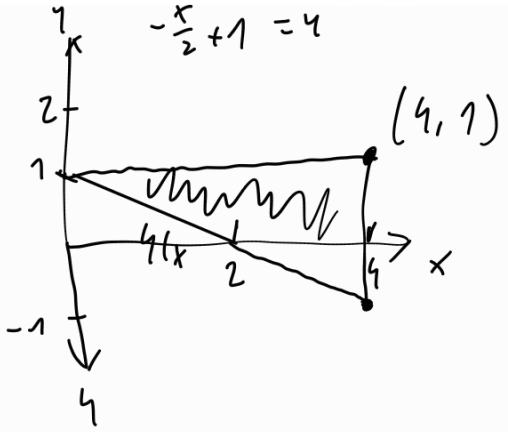
Beispiel 5) Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B 12x^2y^3\,dx\,dy$, wobei B der durch $x=4$, $y=1$ und $x+2y=2$ berandete beschränkte Bereich der (x,y)-Ebene sei.

$x=4,\ y=1 \qquad x+2y=2$

$x = 2-2y$

$y = 2-2y$

$-1 = y$



$$\int_{-1}^{1}\int_{2-2y}^{4} 12x^2y^3\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{12}{3}x^3y^3\right]_{2-2y}^{4}$$

$$\int_{-1}^{1} 256y^3 - \frac{12}{3}(2-2y)^3y^3$$

$$\int_{-1}^{1} 256y^3 - 4\cdot(8-24y+24y^2-8y^3)\cdot y^3$$

$$\int_{-1}^{1} 256y^3 - 32y^3 + 96y^4 - 96y^5 + 32y^6 = \left[64y^4 - 8y^4 + \frac{96}{5}y^5 - \frac{96}{6}y^6 + \frac{32}{7}y^7\right] =$$

$$= 64 - 8 + \frac{96}{5} - \frac{96}{6} + \frac{32}{7} - \left(64 - 8 - \frac{96}{5} - \frac{96}{6} - \frac{32}{7}\right)$$

$$\frac{2\cdot 96}{5} + \frac{2\cdot 32}{7} = \frac{1661}{35} \approx 47.5$$

Beispiel 6) Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $B = \{(x,y,z) | 1 \leq z \leq 2, (x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$ sei.

$$y^2 \leq 2-(x-1)^2$$

$$|y| \leq \sqrt{2-(x-1)^2}$$

$$\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \iint x\,dx$$

$$-\sqrt{2-(x-1)^2} \leq y \leq +\sqrt{2-(x-1)^2}$$

$\rightarrow$ Polarkoord: $x = r \cdot \cos(\varphi)$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$