Beispiel 1) Zeigen Sie die folgende Identität.

$\sin($

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{N}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) - 1 = -1 + 2\cdot\sum_{k=0}^{N}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} = -1 + 2\cdot\sum_{k=0}^{N}\cos(kx) =$$

$$\underline{1 + 2\cdot\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)}$$

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{N}\left(e^{ix}\right)^k + \sum_{k=0}^{N}\left(e^{-ix}\right)^k - 1 = \frac{1-e^{ix(N+1)}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-ix(N+1)}}{1-e^{-ix}} - 1$$

$$= \frac{\left(1-e^{ix(N+1)}\right)\cdot\left(1-e^{-ix}\right) + \left(1-e^{-ix(N+1)}\right)\cdot\left(1-e^{ix}\right) - \left(1-e^{ix}\right)\cdot\left(1-e^{-ix}\right)}{2-e^{-ix}-e^{ix}} =$$

$$= \frac{1 - e^{-ix} - e^{ix(N+1)} + e^{ixN} + 1 - e^{ix} - e^{-ix(N+1)} + e^{-ixN} - 1 + e^{-ix} + e^{ix} - 1}{2-e^{-ix}-e^{ix}}$$

$$= \frac{e^{ixN} + e^{-ixN} - e^{ix(N+1)} - e^{-ix(N+1)}}{\left(1-e^{ix}\right)\cdot\left(1-e^{-ix}\right)} \overset{*}{=} \frac{\left(1-e^{-ix}\right)\left(e^{-iNx} - e^{ix(N+1)}\right)}{\left(1-e^{ix}\right)\cdot\left(1-e^{-ix}\right)}$$

$*$ = nicht trivial!

$$= \frac{e^{-iNx} - e^{ix(N+1)}}{1-e^{ix}} = \frac{-e^{i\frac{x}{2}}\left(-e^{-iNx-i\frac{x}{2}} + e^{ix(N+1)-i\frac{x}{2}}\right)}{-e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{e^{ix(N+\frac{1}{2})} - e^{-ix(N+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Beispiel 2) Sei $f(t)$ eine auf $[0,T]$ stückweise stetige T-periodische Funktion $f(t)$. Man zeige, dass dann für die zu $f(t)$ gehörende Fourierreihe

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t)$$

der folgende Streckungssatz (für $c > 0$) gilt

$$F(t) = f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(c\omega)t},$$

$f(t)$ $\quad [0,T]$ stückweise stetig

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t} \sim f(t)$$

Man <u>zeige</u> Streckungssatz: $F(t) = f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik(c\omega)t}$

$f \cdot c = f'$

$\rightarrow T' = \frac{1}{f \cdot c} = \frac{T}{c}$

$\rightarrow \omega' = 2\pi \frac{c}{T} = \underline{\omega \cdot c}$

$$F(t) = \sum_{k=-N}^{N} d_k \cdot e^{ik(c\omega)t}$$

$\omega = \frac{\omega'}{c}$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \underbrace{\frac{c}{T} \int_0^{\frac{T}{c}} f(ct) \cdot e^{-i\omega c t} dt}$$

$\rightarrow$ Subst. $u = c \cdot t$

$dt = \frac{du}{c} \rightarrow \frac{c}{T} \cdot \frac{1}{\cancel{c}} \cdot \int_0^T f(u) \cdot e^{-i\omega u} du \leftrightarrow c_k$

$\rightarrow$ durch Substitionsregel gezeigt!

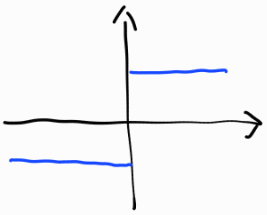
Beispiel 3) Man zeige: Ist eine 2π-periodische Funktion $f(t)$ gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $b_n = 0$, für $n \geq 1$. Ist $f(t)$ hingegen ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $a_n = 0$, für $n \geq 0$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} \, dt$$

$f(t) = f(-t) \rightarrow$ gerade

$\int_{-\pi}^{\pi}$ einer ungeraden Fkt. ist 0

gerade



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

subst. $u = -t$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(-t) \cdot \sin(-tn) \cdot -dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

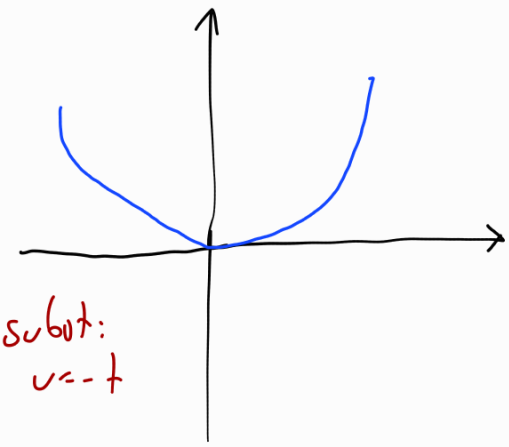
$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \cdot dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt = \underline{\underline{0}}$$

ungerade

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{gerade}}}_{= \text{ungerade}} \, dt = 0$$

$f(t) = -f(-t)$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(-t) \cdot \cos(-nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt$$

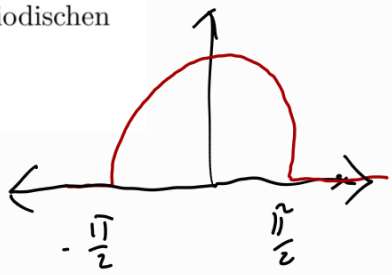
subst: $u = -t$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt = \underline{\underline{0}}$$

Beispiel 4) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$



$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t) + |\cos(t)|)\cdot e^{-ik\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\cos(t)\cdot e^{-ik\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{it}+e^{-it})\cdot e^{-ik\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it(1-k\omega)} + e^{-it(1+k\omega)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(1-k\omega)}}{i(1-k\omega)} - \frac{e^{-it(1+k\omega)}}{i(1+k\omega)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega}}{i(1-k\omega)} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega}}{i(1+k\omega)} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{i(1-k\omega)} + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{i(1+k\omega)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega}}{1-k\omega} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega}}{1+k\omega} + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{1-k\omega} + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{1+k\omega}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega} + k\omega\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega} + e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega} - k\omega\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega} + e^{i\frac{\pi}{2}k\omega} + k\omega e^{i\frac{\pi}{2}k\omega} + e^{i\frac{\pi}{2}k\omega} - k\omega\cdot e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{(1-k\omega)(1+k\omega)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}k\omega} + 2e^{i\frac{\pi}{2}k\omega}}{1-k^2\omega^2}\right] = \frac{2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}k\omega)}{\pi - \pi k^2\omega^2} = c_k$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}k\omega)}{\pi - \pi k^2\omega^2}\cdot e^{ik\omega t}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \rightarrow \quad \frac{2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}k\omega) + 2\cdot\cos(-\frac{\pi}{2}k\omega)}{\pi - \pi k^2\omega^2} = \frac{4\cos(\frac{\pi}{2}k\omega)}{\pi - \pi k^2\omega^2}$$

$$b_k = (c_k - c_{-k})i \quad \rightarrow 0, \text{ da gerade Fkt.} \rightarrow \frac{(2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}k\omega) - 2\cdot\cos(-\frac{\pi}{2}k\omega))\cdot i}{\pi - \pi k^2\omega^2}$$

$$a_0 = 2\cdot c_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$= \frac{0i}{\pi - \pi k^2\omega^2} = \underline{0}$$

$$\boxed{\cos(-t) \overset{!}{=} \cos(t)}$$

Für $f = 1$, $w = 2\pi$, $a_0 \dots a_k$

[Dermas Bild]

Beispiel 5) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(t) = \sin(t) \cdot t$ für $-\pi \leq t < \pi$ und $f(t + 2\pi) = f(t)$.
Anmerkung: Sie dürfen die Resultate aller Beispiele im Buch ohne Beweis verwenden.

$\rightarrow$ ungerade · ungerade = gerade $\rightarrow$ keine b_n Koeff.

$b_n = 0$

$f(t) = \sin(t) \cdot t \rightarrow$ Fourier Reihe $\quad -\pi \leq t \leq \pi \rightarrow 2\pi$-periodisch

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cdot t \cdot \cos(nt)\, dt$$

$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(y+x) - \sin(y-x))$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nt+t) - \sin(nt-t)) \cdot t \cdot dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(nt+t)}_{g'} \cdot \underbrace{t}_{f}\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(nt-t)}_{g'} \cdot \underbrace{t}_{f} \cdot dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nt+t)}{n+1} \cdot t\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt+t)}{n+1}\, dt + \left[\frac{\cos(nt-t)}{n-1} \cdot t\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt-t)}{n-1}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\pi\cos(\pi(n+1)) - \cos(\pi(n+1))\pi}{n+1} + \left[\frac{\sin(nt+t)}{(n+1)^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\pi \cdot \cos(\pi(n-1)) + \pi \cdot \cos(\pi(n-1))}{n-1} - \left[\frac{\sin(nt-t)}{(n-1)^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2\pi\cos(\pi(n+1))}{n+1} + \frac{2\pi \cdot \cos(\pi(n-1))}{n-1}\right) =$$

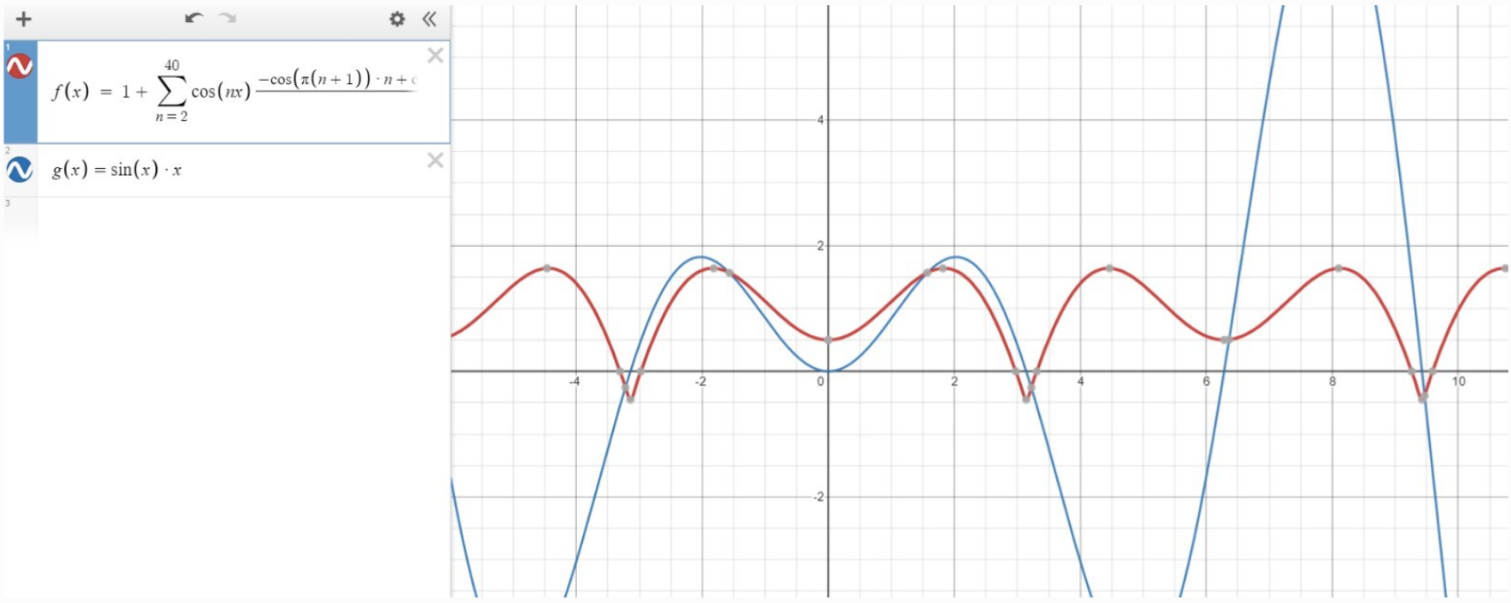
$$\frac{-\cos(\pi(n+1)) \cdot n + \cos(\pi(n+1)) + \cos(\pi(n-1)) \cdot n + \cos(\pi(n-1))}{n^2 - 1} = a_n$$

$a_0 = 2$

$n = 1 \rightarrow$ undefiniert

$$n = 1 \rightarrow \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cdot t \cdot \cos(t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{8}\sin(2t) - t\cdot\cos(2t)\cdot\frac{1}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}$$



Beispiel 6) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+nx)^2}$$

für $x \in [0, \infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende Identität für $|x| < 1$ ohne Beweis verwenden:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+nx)^2} \qquad x \in [0, \infty]$$

Max. bei: $x=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$ ✓

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot (1+nx)^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n \cdot (1+nx)^2} dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \int_0^1 (1+nx)^{-2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[- \frac{(1+nx)^{-1}}{n} \right]_0^1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left[- \frac{1}{(1+n) \cdot n} + \frac{1}{n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n}{(1+n) \cdot n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot (1+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0,5)^n}{1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$= 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{1-0,5}\right) = \underline{\underline{2 \cdot \ln 2}} =$$