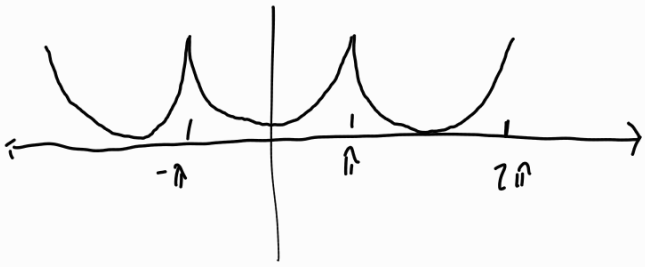
Beispiel 1) Wie lautet die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{t^2}{\pi^2}$ für $-\pi \leq t \leq \pi$ und $f(t+2\pi) = f(t)$? Können Sie aus dieser Darstellung die Gültigkeit nachstehender Formeln ableiten?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$f(t) = \frac{t^2}{\pi^2} \qquad -\pi \leq t \leq \pi \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$



$\rightarrow$ gerade Fkt. $\rightarrow$ keine b_n

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cdot \cos(nt)\, dt$$

$$\int \underbrace{t^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(nt)}_{g'}\, dt = t^2 \cdot \frac{\sin(nt)}{n} - \frac{2}{n} \int \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{\sin(nt)}_{g'}\, dt$$

$$= t^2 \cdot \frac{\sin(nt)}{n} - \frac{2}{n} \cdot \left(-t \cdot \frac{\cos(nt)}{n} + \frac{1}{n} \int \cos(nt)\, dt \right)$$

$$= \frac{t^2 \cdot \sin(nt)}{n} + \frac{2t\cos(nt)}{n^2} - \frac{2\sin(nt)}{n^3}$$

$$= \frac{n^2 \cdot t^2 \cdot \sin(nt) + 2tn\cos(nt) - 2\sin(nt)}{n^3}$$

$$\frac{1}{\pi^3} \cdot \left[\frac{n^2 \cdot t^2 \cdot \sin(nt) + 2tn\cos(nt) - 2\sin(nt)}{n^3} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{n^2\pi^2 \sin(\pi n) + 2\pi n \cos(\pi n) - 2\sin(\pi n) + n^2\pi^2 \sin(\pi n) + 2\pi n \cos(\pi n) - 2\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3}$$

$$= \frac{2n^2\pi^2 \sin(\pi n) + 4\pi n \cos(\pi n) - 4\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} = \frac{4\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}$$

$\rightarrow$ $n \bmod 2 = 1 \rightarrow \cos \rightarrow -1$

$n \bmod 2 = 0 \rightarrow \cos \rightarrow 1$

$$a_n = \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi^3} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{\pi^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow S_f = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nt)$$

$\rightarrow$ Zeige Identität von oben

$$\frac{t^2}{\pi^2} - \frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nt)$$

$$= \frac{3t^2 - \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

2. Form $\quad t = 0 \rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad | \cdot (-1)$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

1. Form $\quad t = \pi \rightarrow \frac{2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Beispiel 2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

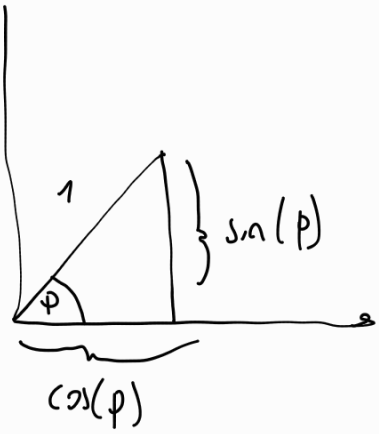
die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

$$z = r \cdot e^{it} = r \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$$

$$z^{2n} = r^{2n} \cdot e^{i2nt} = r^{2n} \cdot (\cos(2nt) + i \sin(2nt))$$



$r = 1$ bei

$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nt) + i \sin(2nt)}{(2n)!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n)!}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \right\} \quad \text{wobei} \quad \underline{\underline{z = e^{it}}}$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{e^{it}} + e^{-e^{it}}}{2} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{\cos(t) + i\sin(t)} + e^{-\cos(t) - i\sin(t)}}{2} \right\}$$

$$= \frac{e^{\cos(t)} \cdot \cos(\sin(t)) + e^{-\cos(t)} \cdot \cos(\sin(t))}{2} = \frac{\cos(\sin(t)) \cdot \left(e^{\cos(t)} + e^{-\cos(t)}\right)}{2}$$

$$= \underline{\underline{\cosh(\cos(t)) \cdot \cos(\sin(t))}}$$

$\rightarrow$ passt das ??

Beispiel 3) Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \le t < T$$

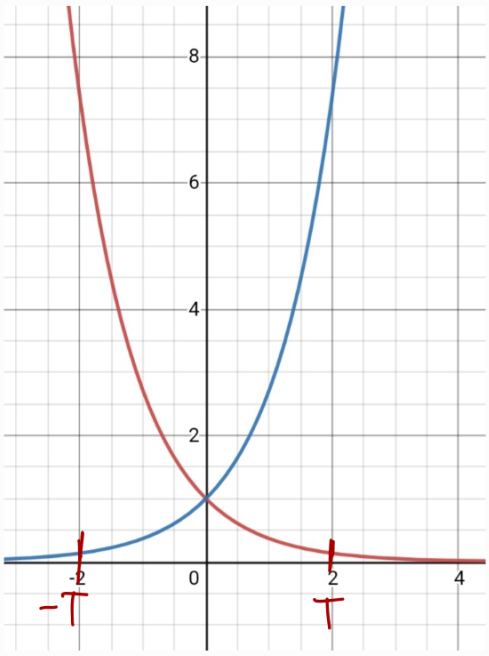
in eine reine Cosinusreihe, d.h., man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \le t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0, \end{cases} \qquad h(t+2T) = h(t).$$

$g(t) = e^t \qquad 0 \le t \le T$

$2\pi \cdot \frac{1}{2T} = \omega$

$\frac{\pi}{T} = \omega$



$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(t) \cdot e^{-ik\frac{\pi}{T}t} \, dt =$$

$$= \int_{-T}^{0} e^{-t(ik\frac{\pi}{T}+1)} \, dt + \int_{0}^{T} e^{t(-ik\frac{\pi}{T}+1)} \, dt$$

$$\frac{1}{2T} \cdot \left(\left[-\frac{e^{-t(ik\frac{\pi}{T}+1)}}{ik\frac{\pi}{T}+1} \right]_{-T}^{0} + \left[\frac{e^{t(-ik\frac{\pi}{T}+1)}}{-ik\frac{\pi}{T}+1} \right]_{0}^{T} \right) \quad \text{"}$$

$\uparrow$

$h(t)$

$$= \frac{1}{2T} \left(\frac{-1 + e^{ik\pi + T}}{ik\frac{\pi}{T}+1} + \frac{e^{-ik\pi+T} - 1}{-ik\frac{\pi}{T}+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2T} \left(\frac{ik\frac{\pi}{T}\left(1 - e^{ik\pi+T}\right) - 1 + e^{ik\pi+T} - ik\frac{\pi}{T}\left(1 - e^{-ik\pi+T}\right) - 1 + e^{-ik\pi+T}}{k^2\frac{\pi^2}{T^2}+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2T} \left(\frac{\cancel{ik\frac{\pi}{T}\left(-\cos(k\pi)\cdot e^T\right)} - 1 + \cos(k\pi)\cdot e^T + \cancel{ik\frac{\pi}{T}\cos(k\pi)\cdot e^T} - 1 + \cos(k\pi)\cdot e^T}{k^2\frac{\pi^2}{T^2}+1} \right)$$

$$\frac{1}{2T} \left(\frac{2\cos(k\pi)\cdot e^T - 2}{k^2\frac{\pi^2}{T^2}+1} \right) = \frac{(-1)^k \cdot e^T - 1}{\frac{k^2\pi^2}{T} + T}$$

$b_n \overset{!}{=} 0 \rightarrow (c_k - c_{-k})i = 0 \checkmark$

$$a_n = c_k + c_{-k} = \frac{2\cdot\left((-1)^k \cdot e^T - 1\right)}{\frac{k^2\pi^2}{T} + T}$$

Unbenannter Graph

desmos

1

$$f(x) = \frac{2 \cdot e^T - 4}{2 \cdot T} + \sum_{n=1}^{15} \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot e^T - 4}{\frac{n^2 \pi^2}{T} + T} \cdot \cos$$

2

$T = 2.7$

0 20

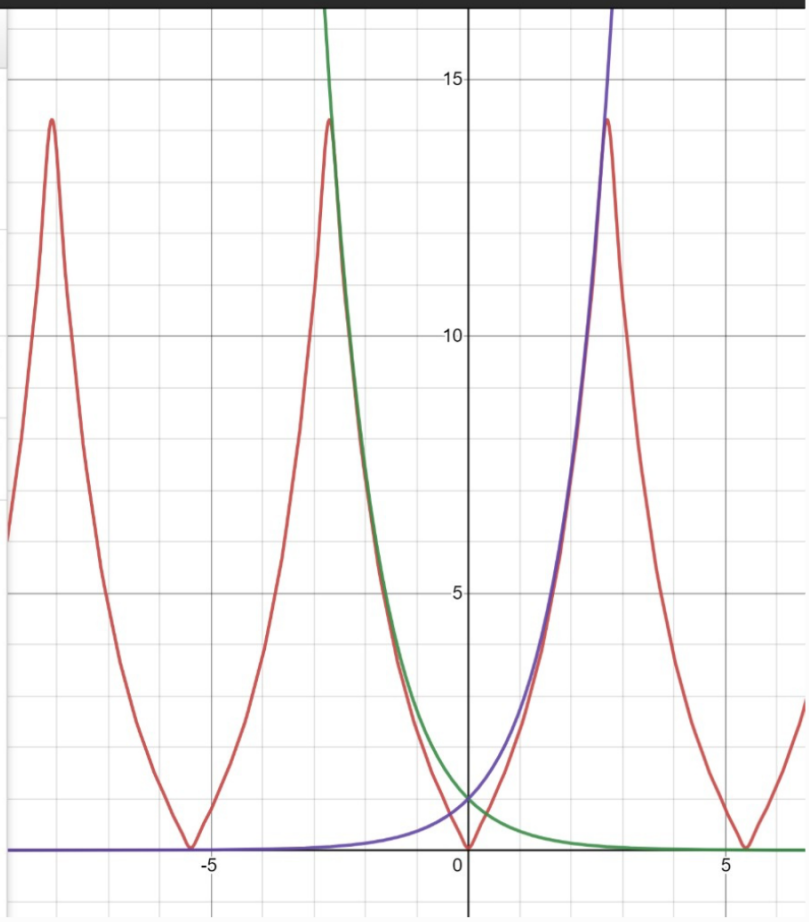
3

e^{-x}

4

e^x

5



Beispiel 4) Sei $f(x) = e^{i\beta x}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, wobei β eine reelle, jedoch keine ganze Zahl ist. Man zeige unter Verwendung der Parseval'schen Gleichung für komplexe Fourier-Reihen, dass

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta - m))}{(\beta - m)^2} = \pi^2.$$

$$f(x) = e^{i\beta x} \qquad -\pi \leq x \leq \pi \qquad \beta \in \mathbb{R} \wedge \beta \notin \mathbb{Z}$$

c_k berechnen

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta x} \cdot e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\beta-k)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ix(\beta-k)}}{i(\beta-k)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\pi(\beta-k)} - e^{-i\pi(\beta-k)}}{i(\beta-k)}\right] = \frac{\sin(\pi(\beta-k))}{\pi(\beta-k)}$$

Pars. Gleichung verwenden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(\pi(\beta-k))}{\pi(\beta-k)}\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta-k))}{\pi^2(\beta-k)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|e^{i\beta x}|^2}_{1}\, dx = \frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) = 1$$

$$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta-k))}{\pi^2(\beta-k)^2} = 1$$

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta-k))}{(\beta-k)^2} = 1 \qquad | \cdot \pi^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta-k))}{(\beta-k)^2} = \pi^2$$

Beispiel 5) Sei N durch 3 teilbar, also $N = 3M$. Man berechne die Spektralkoeffizienten c_k, $0 \leq k \leq N-1$, für die diskrete N-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\mathbf{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)^T$ beschrieben wird.

$$\sum_{q=0}^{N-1} q = \frac{1-q^N}{1-q}$$

$N = 3M \qquad c_k \quad 0 \leq k \leq N-1$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l \cdot e^{-il\frac{2\pi k}{N}} = \frac{1}{3M} \sum_{l=0}^{3M-1} y_l \cdot e^{-il\frac{2\pi k}{3M}}$$

$$= \frac{1}{3M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-i3l\frac{2\pi k}{M}} = \frac{1}{3M} \cdot \frac{1-e^{-i6\pi k}}{1-e^{-i\frac{6\pi k}{M}}} = 0$$

$k \neq 0, M, 2M,$

$$\hookrightarrow \frac{1}{3M} \sum_{l=0}^{M-1} \underbrace{e^{-i6\pi\frac{k}{M}}}_{\text{für } k \in \{0, M, 2M\} \; = 1} = \frac{M}{3M} = \frac{1}{3}$$

??

Beispiel 6) Man gebe explizit die Fourier-Matrix F_4 und deren Inverse F_4^{-1} zur Diskreten Fourier-Transformation mit $N = 4$ an. Insbesondere führe man damit für den Vektor

$$\mathbf{y} = (10, 2, 4, 16)^T$$

die DFT und anschließend die IDFT durch.

$$F_4 = \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{pmatrix} \quad 3\times 3 \text{ Matrix} \qquad w^k = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^k \qquad \underline{\underline{N=4}}$$

DFT

$$c = \frac{1}{N}\bar{F}_4 y = \frac{1}{N}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{pmatrix}}^{F_4} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{\pi}{2}} & e^{-i\pi} & e^{-\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & e^{-i\pi} & e^{-i2\pi} & e^{-i3\pi} \\ 1 & e^{-i\frac{3\pi}{2}} & e^{-i3\pi} & e^{-i\frac{9\pi}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 6+14i \\ -4 \\ 6-14i \end{pmatrix}$$

$$c = \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{6}{4} + \frac{14}{4}i \\ -1 \\ \frac{6}{4} - \frac{14}{4}i \end{pmatrix}}$$

IDFT

$$F^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \overline{F_N}$$

Wir brauchen aber $\bar{F}^{-1} \rightarrow \bar{F}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot F_N$

$$\bar{F}^{-1} = \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}}^{F_n}$$

$$\rightarrow \quad N \cdot \overline{F}^{-1} \cdot c = 4 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{6}{4} + \frac{14}{4} i \\ -1 \\ \frac{6}{4} - \frac{14}{4} i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 + \frac{6}{4} + \frac{14}{4} i - 1 + \frac{6}{4} - \frac{14}{4} i \\ 8 + \frac{6}{4} i - \frac{14}{4} + 1 - \frac{6}{4} i - \frac{14}{4} \\ 8 - \frac{6}{4} - \frac{14}{4} i - 1 - \frac{6}{4} + \frac{14}{4} i \\ 8 - \frac{6}{4} i + \frac{14}{4} + 1 + \frac{6}{4} i + \frac{14}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = y$$