**Beispiel 1)**

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen $f_x$, $f_y$ und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $g(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x+2y)$.

a)

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad f_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

<u>Tangentialebene:</u> $(0.2, 0.3)$

→ Approximation 1. Ordnung

$$\rightarrow \quad z = f(0.2, 0.3) + f_x(0.2, 0.3)(x - 0.2) + f_y(0.2, 0.3)(y - 0.3)$$

$$\approx -0.32x - 0.214y + 1.072$$

b)

$$g(x,y) = x^2 \sin(y) + \cos(x+2y)$$

$$g_x = 2x \sin(y) - \sin(x+2y) \qquad g_y = x^2 \cos(y) - 2 \cdot \sin(x+2y)$$

$$g_{xx} = 2\sin(y) - \cos(x+2y) \qquad g_{yy} = -x^2 \sin(y) - 4\cos(x+2y)$$

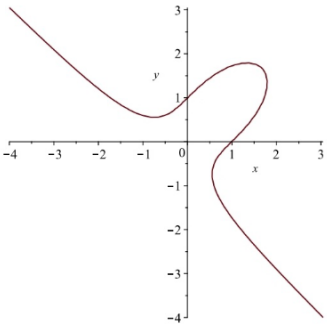
$$g_{yx} = g_{xy} = 2\cos(y) + 2 \cdot \sin(x+2y)$$

**Beispiel 2)** Die Funktion $y(x)$ sei implizit gegeben durch die Gleichung $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$ und besteht aus drei Funktionszweigen, deren Funktionsgraphen zusammengesetzt eine Kurve in der $x, y$-Ebene ergeben (siehe Skizze).

($a$) Man bestimme die Ableitung $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ durch implizites Differenzieren.

($b$) Zu $x = 1$ gibt es drei $y$-Werte $y_1, y_2, y_3$, die die obige Gleichung erfüllen. Man bestimme diese $y$-Werte und berechne die Ableitung $y'$ in den drei Punkten $P_i$ auf der Kurve mit den Koordinaten $(1, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ (man beachte, dass $y'$ von $x$ und $y$ abhängt).

($c$) Es gibt zwei Punkte $Q_1$ und $Q_2$ auf der Kurve, wo $y'$ nicht existiert ("unendlich groß" wird). Man bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte (dort hängen die drei Funktionszweige zusammen).




a/ $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$

Ableiten: $\frac{dy}{dx} \rightarrow$ $3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{-3x + 3y^2}$$

b/ Zu $x = 1$ gibt es drei $y$-Werte $y_1, y_2, y_3$, die die obige Gleichung erfüllen. Man bestimme diese $y$-Werte und berechne die Ableitung $y'$ in den drei Punkten $P_i$ auf der Kurve mit den Koordinaten $(1, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ (man beachte, dass $y'$ von $x$ und $y$ abhängt).

$F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$

$x = 1 \rightarrow$ $-3y + y^3 = 0$

$y(-3 + y^2) = 0$

$y_1 = 0$

$y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

Ableitung im Punkt

$y'(1, y_i) = \frac{3y_i - 3}{-3 + 3y_i^2}$

$y_1 = 1$

$y_2 = 0.366$

$y_3 = -0.366$

c)

Es gibt zwei Punkte $Q_1$ und $Q_2$ auf der Kurve, wo $y'$ nicht existiert ("unendlich groß" wird). Man bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte (dort hängen die drei Funktionszweige zusammen).

$$\rightarrow y' = \frac{3y - 3x^2}{\underbrace{-3x + 3y^2}_{-3x + 3y^2 = 0}}$$

$$y^2 = x \rightarrow F(y^2, y) = y^6 - 3y^3 + y^3 - 1 = 0$$

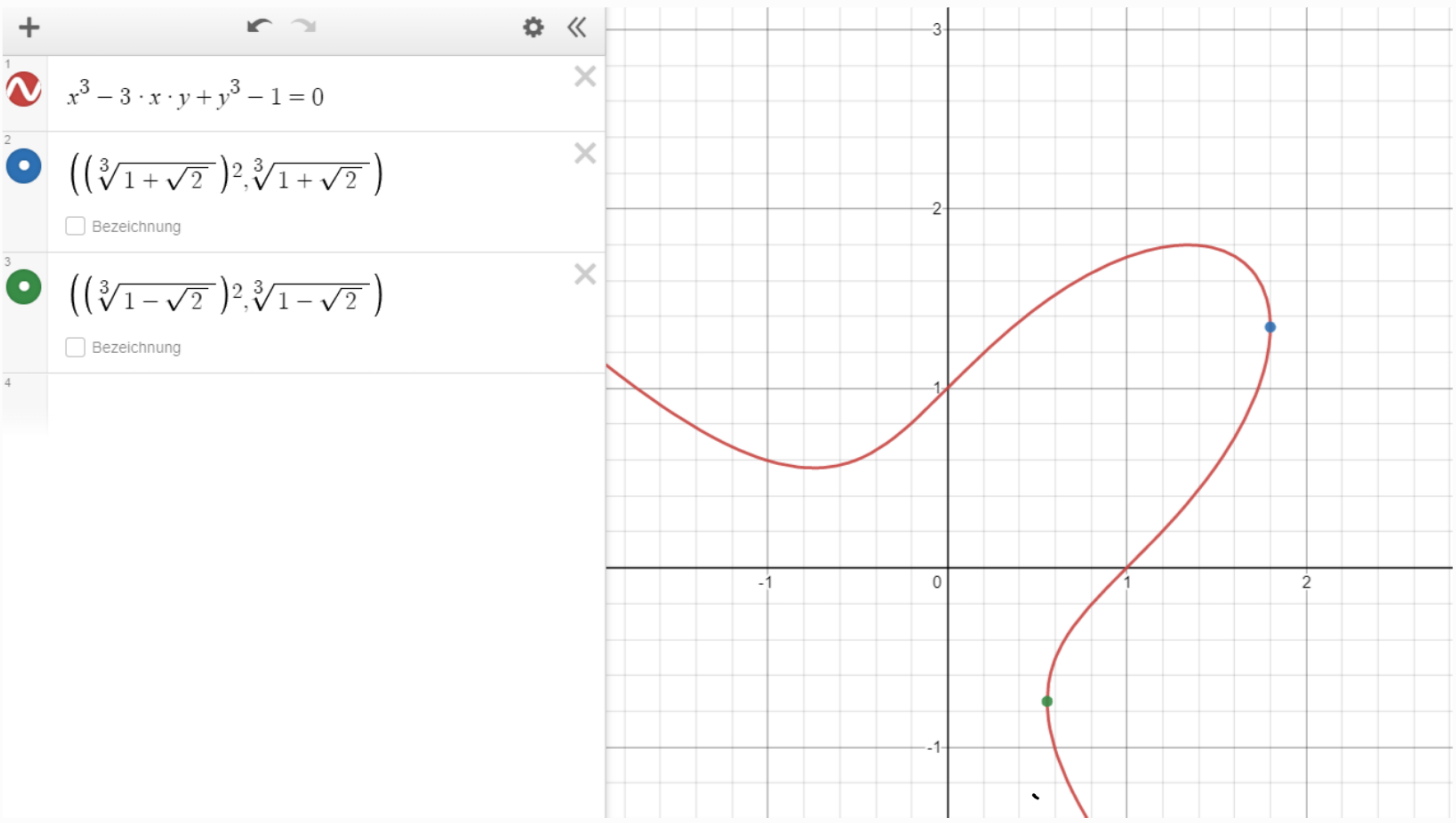
$$y^6 - 2y^3 - 1 = 0$$

$$z = y^3 \qquad z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$\rightarrow z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$$



**Beispiel 3)** Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \ln(u\sin(u) - v)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \tan(-u + v^3)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(2t, t^2+1)$.

$$h(t) = \frac{d}{dt}\, g(2t, t^2+1) \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dF}{dt} = \ln\left[2t \cdot \sin(2t) - t^2 - 1\right] \cdot 2 + \tan\left[-2t + (t^2+1)^3\right] \cdot 2t$$

**Beispiel 4)** Man berechne die quadratische Approximation der Funktion $F(x,y) = e^x \cos y$ im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[ f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$

$f_x = f_{xx} = e^x \cos(y)$

$f_y = f_{yx} = -e^x \sin(y)$

$f_{yy} = -e^x \cos(y)$

Alle Terme außer $f_y$ und $f_{yx}$ sind $\underline{0}$

$$\rightarrow T_2(x,y) = -\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - x \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

a wird zu k

**Beispiel 5)** Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x,y,z) = 3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix $A$, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$? Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Form positiv definit ist.

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\underbrace{a}_{3}x + \underbrace{b}_{\frac{k}{2}}y + \underbrace{c}_{1}z,\ \underbrace{d}_{\frac{k}{2}}x + \underbrace{e}_{2}y + \underbrace{f}_{1}z,\ \underbrace{g}_{1}x + \underbrace{h}_{1}y + \underbrace{i}_{2}z)$$

$c + g = 2 \rightarrow$ aus Symmetrie folgt $c = g = 1$

$\rightarrow$ selbes für $f = h = 1$

$b + d = k$

$b = d$

$\rightarrow \frac{k}{2} = b = d$

$$\rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{k}{2} & 1 \\ \frac{k}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

positiv definit := Alle Hauptminoren positiv

1/ $\begin{vmatrix} 3 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 2 \end{vmatrix} = 6 - \frac{k^2}{4} > 0$

$\underline{-\sqrt{24} < k < \sqrt{24}}$ (erkennt man anhand der Parabel)

2/ $\begin{vmatrix} 3 & \frac{k}{2} & 1 \\ \frac{k}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} - 3 - \frac{2k^2}{4} - 2$

$7 + k - \frac{k^2}{2} > 0$

$k^2 - 2k - 14 > 0$

$k = 1 \rightarrow$ pos. definit

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{15}$

$\underline{1 - \sqrt{15} < k < 1 + \sqrt{15}}$

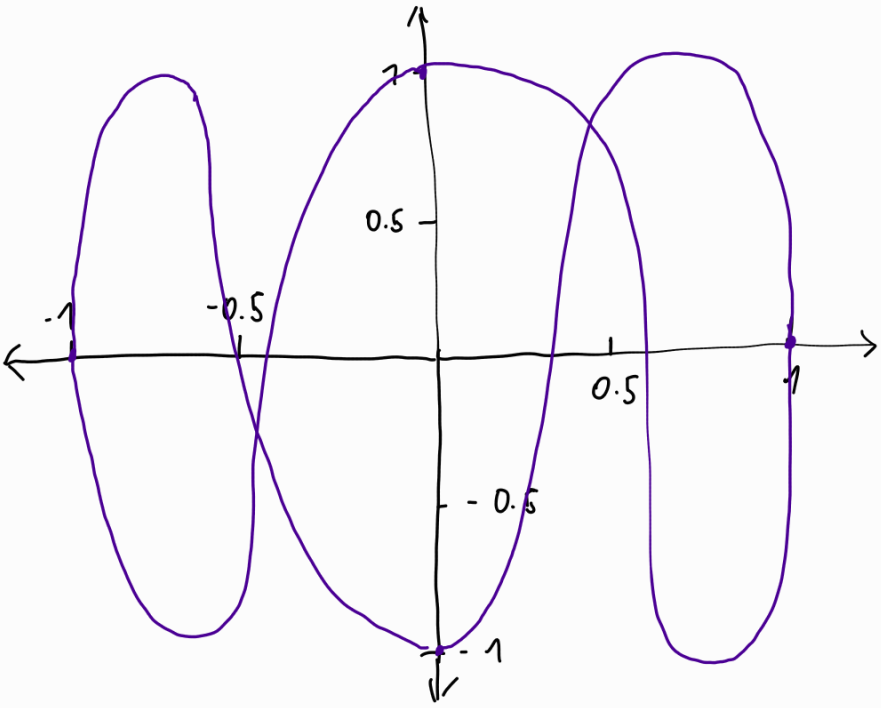
**Beispiel 6)** Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t < 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch die Wendepunkte dieser Kurve bestimmen? (Verwenden Sie dabei ein Computeralgebrasystem oder WolframAlpha.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

| | $(x, y)$ |
|---|---|
| $t = 0$ | $(1, 0)$ |
| $t = \frac{\pi}{2}$ | $(0, -1)$ |
| $t = \pi$ | $(-1, 0)$ |
| $t = \frac{3\pi}{2}$ | $(0, 1)$ |
| $t = 2\pi$ | $(1, 0)$ |




**Waagrechte Linien:**

$y'(t) = 0 = 3 \cdot \cos(3t)$

$t = \frac{\pi}{6}$ $\quad \vec{x}(\frac{\pi}{6}) = (0{,}87, 1)$

$t = \frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{x}(\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$

$t = \frac{5\pi}{6}$ $\quad \vec{x}(\frac{5\pi}{6}) = (-0{,}87, 1)$

$t = \frac{7\pi}{6}$ $\quad \vec{x}(\frac{7\pi}{6}) = (-0{,}87, -1)$

$t = \frac{9\pi}{6}$ $\quad \vec{x}(\frac{9\pi}{6}) = (0, 1)$

$t = \frac{11\pi}{6}$ $\quad \vec{x}(\frac{11\pi}{6}) = (0{,}87, -1)$

**Senkrechte Linien:**

$x'(t) = 0 = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t)$

$t = 0$ $\quad \vec{x}(0) = (1, 0)$

$t = \pi$ $\quad \vec{x}(\pi) = (-1, 0)$

# Ableitung der parametr. Kurve

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \cdot \cos(3t)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d\dot{\vec{x}}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-9 \cdot \sin(3t) \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \cos(3t) \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^3\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{-9*\sin(3*t)*\cos\left(t+\frac{pi}{2}\right)+3*\cos(3*t)*\sin\left(t+\frac{pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(t+\frac{pi}{2}\right)\right)^3} = 0$$

Real solutions

$$t = \pi n - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}(3+2\sqrt{3})}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pi n + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}(3+2\sqrt{3})}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

W1 | $t = 0.97$ $\quad \vec{x}(0.97) = (0.56, 0.229)$

W2 | $t = 2.168$ $\quad \vec{x}(2.168) = (-0.56, 0.229)$

W3 | $t = 4.114$ $\quad \vec{x}(4.114) = (-0.56, -0.229)$

W4 | $t = 5.3104$ $\quad \vec{x}(5.3104) = (0.56, -0.229)$