Beispiel 1) Lösen Sie das AWP

$$u_t + u^2 u_x = 0, \qquad u(x,0) = x.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass eine implizite Lösung der Form $u = f(x - tg(u))$ existiert.

$$u = f(x - tg(u))$$

$$\Rightarrow \quad u_t = -f'(x - tg(u)) \cdot (g(u) + t \cdot g'(u) \cdot u_t)$$

$$u_t = \frac{-f'(x - tg(u)) \cdot g(u)}{1 + f'(x - tg(u)) \cdot t \cdot g'(u)}$$

$$\rightarrow \quad u_x = f'(x - tg(u))$$

$$\rightarrow \quad \frac{-f'(x - tg(u)) \cdot g(u)}{1 + f'(x - tg(u)) \cdot t \cdot g'(u)} + u^2 f'(x - tg(u)) = 0$$

$$u_t = -\frac{f_t}{f_u} \qquad u_x = -\frac{f_x}{f_u} \qquad f(x, t, u(x,t)) = c \quad \rightarrow \quad \text{Ableiten}$$

$$f_t + u^2 f_x = 0$$

<u>Methode der Char.</u>

$$\dot{t} = 1$$

$$\dot{x} = u^2$$

$$\dot{u} = 0$$

$\rightarrow$ nach t auflösen

$$\frac{dx}{dt} = u^2 \quad \rightarrow \quad x = t \cdot u^2 + d$$

$$\underline{x - t u^2 = d}$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{u = c}$$

$p_1 = x - tu^2 \qquad p_2 = u$

$\rightarrow \quad f = D(x - tu^2, u)$

$\rightarrow \quad u = G(x - tu^2)$

Beispiel 2) Bestimmen Sie die Normalform der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + x + y + 1 = 0.$$

$A = 1 \quad B = 0 \quad C = -1 \quad F = -u_x - u_y - x - y - 1$

$\rightarrow AC - B^2 = -1 < 0 \rightarrow$ hyperbolisch

$k = k(x,y) \quad d = d(x,y) \quad U(k,d) = u(x,y)$

$u_y = U_k \cdot k_y + U_d \cdot d_y$

$u_x = U_k \cdot k_x + U_d \cdot d_x$

$u_{xx} = (U_{kk} \cdot k_x + U_{kd} \cdot d_x) \cdot k_x + U_k \cdot k_{xx} + (U_{dk} \cdot k_x + U_{dd} \cdot d_x) \cdot d_x + U_d \cdot d_{xx}$

$u_{xy} = (U_{kk} \cdot k_y + U_{kd} \cdot d_y) \cdot k_x + U_k \cdot k_{xy} + (U_{dk} \cdot k_y + U_{dd} \cdot d_y) \cdot d_x + U_d \cdot d_{xy}$

$u_{yy} = (U_{kk} \cdot k_y + U_{kd} \cdot d_y) \cdot k_y + U_k \cdot k_{yy} + (U_{dk} \cdot k_y + U_{dd} \cdot d_y) \cdot d_y + U_d \cdot d_{yy}$

$\rightarrow A \cdot U_{kk}(k_x^2) + 2B\, U_{kk}(k_y \cdot k_x) + U_{kk} \cdot C \cdot (k_y^2) +$

$+ U_{kd} \cdot (2A\, d_x k_x + 2B\, d_y k_x + 2B k_y d_x + 2C\, d_y k_y) + \ldots$

$\rightarrow$ hyperbolisch

$\rightarrow \quad A z_x + (B \pm \sqrt{B^2 - AC})\, z_y = 0$

1/ $= z_x + \sqrt{1}\, z_y = 0 \quad \rightarrow \quad z_x + z_y = 0$

$\dot{x} = 1$

$\dot{y} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = 1 \quad \Big\|\int$

$x = y + C \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = C = x - y$

Wähle $k(x,y) = x - y$

2/ $z_x - z_y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -1 \quad \rightarrow \quad x = -y + C \quad \rightarrow \quad p_2 = C = x + y$

Wähle $d(x,y) = x + y$

$*$ → einsetzen für part. Ableitungen von k und d, und dann in DGL von Angabe

→ $d_x = d_y = 1$ $\quad k_x = 1 \quad k_y = -1$

$d_{k_y} = d_{xx} = d_{yy} = 0$ $\quad k_{xx} = k_{yy} = k_{xy} = 0$

→ Form des Buch: $a \cdot U_{kk} + 2b\, U_{kd} + U_{dd} = f(k, d, U, U_k, U_d)$

$a = A - 2B + C = 0$

$b = A + B(1-1) - C = 2$ → $4 U_{kd} = -\overset{*}{U_x} - \overset{*}{U_y} - \underbrace{\underbrace{x - y}_{(k+y)}}_{d} - 1$

einsetzen oben

$c = A + 2B + C = 0$

↓

$$4 U_{kd} = -U_k - U_d + U_k - U_d - d - 1$$

$$\underline{\underline{4 U_{kd} = -2U_d - d - 1}}$$

Beispiel 3) Man betrachte die Temperaturverteilung $u(x,t)$ eines Stabes der Länge ℓ, welche an der Stelle $0 \le x \le \ell$ zur Zeit $t \ge 0$ durch die homogene Wärmeleitungsgleichung (mit einer vom Material abhängigen Konstanten $\alpha > 0$) beschrieben werden kann:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$

Man löse nun mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ das folgende Rand-Anfangswert-Problem (für eine vorgegebene Funktion $f(x)$):

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{für } 0 \le x \le \ell, \qquad u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \text{für } t \ge 0.$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

einsetzen: $X(x) \cdot T'(t) = \alpha^2 T(t) \cdot X''(x)$

$$\frac{X(x)}{X''(x)} = \alpha^2 \frac{T(t)}{T'(t)} = \lambda = \text{const}$$

1/ $X(x) = X''(x) \cdot \lambda$

1/ $X''(x) - X(x) \cdot \frac{1}{\lambda} = 0$

$k^2 - \frac{1}{\lambda} = 0$

$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

$\rightarrow X(x) = c_1 \cdot e^{\lambda^{-\frac{1}{2}} x} + c_2 \cdot e^{-\lambda^{-\frac{1}{2}} x}$

$\rightarrow X(0) = X(\ell) = 0$

$0 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = -c_2$

$\rightarrow X(x) = c_1 \cdot e^{\lambda^{-\frac{1}{2}} x} - c_1 e^{-\lambda^{-\frac{1}{2}} x}$

$0 = c_1 \left(e^{\lambda^{-\frac{1}{2}} \ell} - e^{-\lambda^{-\frac{1}{2}} \ell} \right)$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ell = i k \pi$

$\ell = i k \pi \cdot \sqrt{\lambda} \rightarrow \frac{\ell^2}{-k^2 \pi^2} = \lambda$

$\frac{\ell}{i k \pi} = \sqrt{\lambda}$

$k \in \mathbb{N}$

$\rightarrow X_k(x) = c_1 \left(e^{\frac{i \pi k}{\ell} x} - e^{-\frac{i \pi k}{\ell} x} \right) =$

$= c_1 \cdot \sin\left(\frac{k}{\ell} \pi x \right)$

2/ $T(t) = \frac{\lambda}{\alpha^2} T'(t)$

$T'(t) - \frac{\alpha^2}{\lambda} T(t) = 0$

$k - \frac{\alpha^2}{\lambda} = 0$

$k = \frac{\alpha^2}{\lambda}$

$\rightarrow T(t) = d_1 \cdot e^{\frac{\alpha^2}{\lambda} t} = d_1 \cdot e^{\frac{-\alpha^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} t}$

3/

(2ℓ-period.) $f(x) = f(-x)$ → als Fourier Reihe

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$ ungerade, daher sin Terme!

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \sin\left(\frac{k \pi}{\ell} x \right)$ 4/

start bei 1
da ungerade Fkt. kein Gleichanteil

$$\boxed{X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x \right)}$$

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k \cdot d_1}_{f_k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x \right) = f(x)$

6/ $c_k \cdot d_1 = f_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x \right) dx$

2/ Lösung der linearen PDGl = $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \underbrace{X_k(x)}_{\text{sin Ausdrücke}}$ $\qquad d_n = \frac{f_n}{c_n}$

$\rightarrow T_k(t)$ ungerade!

7/

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\cancel{\frac{f_k}{c_k}}}_{d_n} \cdot e^{\frac{a^2}{\lambda} t}}_{T(t)} \cdot \cancel{\frac{f_k}{d_n}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \cdot e^{\frac{-a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t}$$

Beispiel 4) Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse. (a) Bisektion, (b) Regula falsi, (c) Newtonsches Näherungsverfahren (Startwert Intervallende).

<u>Bisektion:</u> $F(x) = x^2 - 4 \rightarrow$ NS $[0, 3]$ $\quad F(0) = -4$, $F(3) = 5$ ✓

$x_0 = 1.5$: $(1.5)^2 - 4 = -1.75 < 0 \rightarrow [1.5, 3] \rightarrow x_1 = 2.25$

$x_1 = 2.25$: $(2.25)^2 - 4 = 1.0625 > 0 \rightarrow [1.5, 2.25] \rightarrow x_2 = 1.875$

$x_2 = 1.875$: $(1.875)^2 - 4 = -0{,}484375 < 0 \rightarrow [1.875, 2.25] \rightarrow x_3 = 2.0625$

<u>Regula Falsi:</u>

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = -3$$

$$x_2 = 3 - \frac{3 - 0}{f(3) - f(0)} f(3) = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{\frac{4}{3} - 3}{f(\frac{4}{3}) - f(3)} \cdot f(\tfrac{4}{3}) = \frac{24}{13}$$

$$x_4 = \frac{24}{13} - \frac{\frac{24}{13} - \frac{4}{3}}{f(\frac{24}{13}) - f(\frac{4}{3})} \cdot f(\tfrac{24}{13}) = \frac{63}{31} \approx 2.032$$

<u>Newtonsches Näherungsverfahren:</u>

$x_0 = 3$ (Angabe) $\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x) = 2x$

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{13}{6}$$

$$x_2 = \frac{13}{6} - \frac{f(\frac{13}{6})}{f'(\frac{13}{6})} = \frac{313}{156}$$

$$x_3 = \frac{313}{156} - \frac{f(\frac{313}{156})}{f'(\frac{313}{156})} \approx 2.00001$$

$\rightarrow$ bestes Verfahren, da quadr. Konvergenz

Beispiel 5) Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[1, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der iterativen Fixpunktbestimmung durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse.
(a) Iterative Fixpunktbestimmung für $x = f(x) = (x^2+3x-4)/3$ (Startwert Intervallende),
(b) iterative Fixpunktbestimmung für $x = g(x) = (4+4x-x^2)/4$ (Startwert Intervallende),
(c) wählen Sie eine andere Funktion $h(x)$, sodass die Gleichung $h(x) = x$ äquivalent ist zur Gleichung $F(x) = 0$.

$F(x) = x^2 - 4 \qquad [1, 3]$

a/ $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{3} \qquad x_0 = 3$

$x_1 = \dfrac{9+9-4}{3} = \dfrac{14}{3}$

$x_2 = \dfrac{\left(\frac{14}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{14}{3} - 4}{3} \approx 10.59$

$x_3 = \dots \approx 46.660 \rightarrow$ divergent

b/ $g(x) = \dfrac{(4+4x-x^2)}{4} \qquad x_0 = 3$

$x_1 = \dfrac{4+12-9}{4} = \dfrac{7}{4}$

$x_2 = \dfrac{4+7-\frac{49}{16}}{4} \approx 1.984$

$x_3 = \dots \approx 1.999\dots \rightarrow$ Fixpunkt wsl. 2

c/ $F(x) = x^2 - 4 = 0 \qquad 0 < h'(x_0) < 1$

$f(x) = 0 \leftrightarrow p(x) = x$

$2\cos(x\pi) = x = p(x)$

$x_0 = 3$

$x_1 = 2\cos(3\pi) = -2$

$x_2 = 2\cos(-2\pi) = 2$

$x_3 = 2\cos(2\pi) = 2$

✓

Beispiel 6) Man zeige: Für $a > 0$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.

$$\varphi(x_n) = x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2 \qquad \frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a} \qquad x^* = \frac{1}{a}$$

<u>Fixpunkt:</u> $\varphi\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} - a\frac{1}{a^2} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{a}}}$

<u>Grenzen einsetzen</u>

$$\varphi\left(\frac{1}{2a}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2a} - a\frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a} < \frac{3}{2a}$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2a}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2a} - a\frac{9}{4a^2} = \frac{3}{a} - \frac{9}{4a} = \frac{3}{4a} > \frac{1}{2a}$$

$$\varphi'(x) = 2 - 2ax \quad \rightarrow \quad NS: \quad 2 = 2ax$$

$$\frac{1}{a} = x \quad \checkmark$$

<u>Lipschitzbedingung:</u> $|\varphi'(x)| \leq \lambda < 1$

$$\left|\varphi'\left(\frac{1}{2a^-}\right)\right| = \left|2 - \overbrace{\frac{2a}{2a^-}}^{<1}\right| = 1$$

$$\left|\varphi'\left(\frac{3^-}{2a^-}\right)\right| = \left|2 - \overbrace{\frac{6a}{2a^-}}^{>1}\right| = 1$$

Lsg. sind ja nd im Intervall