Beispiel 1) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x & +5y & -2z & = & 3 \\ x & +y & -4z & = & -9 \\ 4x & -y & +2z & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi sowie des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel (Startwerte $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, jeweils zwei Schritte), wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Zeilensummenkriterium:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} 5+2 < 1 & \times \\ 1+4 < 1 & \times \\ 4+1 < 2 & \times \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 2+1 < 3 & \checkmark \\ 1+2 < 5 & \checkmark \\ 1+1 < 4 & \checkmark \end{array}$$

Jacobi:

$$x_{k+1} = \frac{1}{4} y_k - \frac{1}{2} z_k + 2$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{5} x_k + \frac{2}{5} z_k + \frac{3}{5}$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{4} x_k + \frac{1}{4} y_k + \frac{9}{4}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{3}{20} - \frac{9}{8} + 2 = \frac{41}{40} = 1.025$

$y_1 = \frac{3}{5} \qquad y_2 = \frac{2}{5} + \frac{18}{20} + \frac{3}{5} = \frac{38}{20} = 1.9$

$z_1 = \frac{9}{4} \qquad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} + \frac{9}{4} = \frac{58}{20} = 2.9$

Gauß-Seidel:

$$x_{k+1} = \frac{1}{4} y_k - \frac{1}{2} z_k + 2$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{5} x_{k+1} + \frac{2}{5} z_k + \frac{3}{5}$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{4} x_{k+1} + \frac{1}{4} y_{k+1} + \frac{9}{4}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} = 0.75$

$y_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad y_1 = \frac{3}{20} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{39}{20} = 1.95$

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 3 \qquad z_1 = \frac{3}{16} + \frac{39}{80} + \frac{9}{4} = \frac{234}{80} = 2.925$

AG Startwert $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

→ in C ausprogrammiert

<u>Jacobi:</u> nach der 9. Iteration: $x = 1$
$y = 2$
$z = 3$

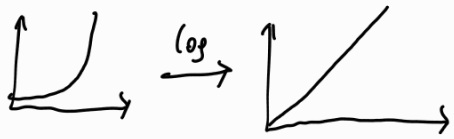
<u>Gauß-Seidel:</u> nach der 9. Iteration: $x = 1$
$y = 2$
$z = 3$

Beispiel 2) Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Bevölkerung $f(t)$	2.54	3.03	3.70	4.46	5.33	6.14	6.96

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2020.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

$g(t) = c e^{bt}$ $\qquad$ $y(t) = a + bt$



→ durch logarithmieren linear machen

$y = \ln g(t) = \underbrace{\ln c}_{a} + bt$ $\qquad$ $\ln e^x$

$a = -11.76332$

$c = 7.785 \cdot 10^{-6}$

$b = 0.0171485$

→ $c = e^a$

$f(t) = 7.785 \cdot 10^{-6} \cdot e^{0.0171485 t}$ $\qquad$ $f(8) = 8.615 \cdot 10^9$

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	t
d ... Bevölkerung	2.54E+09	3.03E+09	3.7E+09	4.46E+09	5.33E+09	6.14E+09	6.96E+09	d
y ... ln(d)	21.65543	21.831828	22.031599	22.218415	22.396617	22.538091	22.663445	y
y * t	42228.088	42790.384	43402.249	43992.461	44569.268	45076.181	45553.525	
t^2	3802500	3841600	3880900	3920400	3960100	4000000	4040100	
Mittelwert Jahr	1980	$\bar{t}$						
Mittelwert ln(y)	22.190775	$\bar{y}$						
Datengröße	7	n						
$\bar{t}$^2	3920400							
Formel für b	0.0171485							
Formel für a	-11.76332							
$\bar{y}$ = a+b$\bar{t}$								
a = $\bar{y}$-b$\bar{t}$								
e^a	7.785E-06							
e^(a+b2020)	8.615E+09							

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

Beispiel 3) Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	4
y	2	-2	1

Quadratische Interpolation:

$(0,2), (1,-2), (4,1)$

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$$c = 2$$

$$a + b + c = -2 \rightarrow a = -b - 4$$

$$16a + 4b + c = 1 \rightarrow -16b - 64 + 4b + 2 = 1$$

$$= 12b = -63$$

$$b = \frac{-63}{12} = -\frac{21}{4}$$

$$\rightarrow a = \frac{21}{4} - 4 = \frac{5}{4}$$

$$p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{21}{4}x + 2$$

Lagrange-Polynome:

$(\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{2}), (\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{-2}), (\overset{x_2}{4}, \overset{y_2}{1})$

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \rightarrow L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-4}{0-4} = \frac{x^2 - 5x + 4}{4}$$

$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-4}{1-4} = \frac{x^2 - 4x}{-3}$$

$$L_2(x) = \frac{x-0}{4-0} \cdot \frac{x-1}{4-1} = \frac{x^2 - x}{12}$$

$$p(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{2} + \frac{2x^2 - 8x}{3} + \frac{x^2 - x}{12}$$

$$= \frac{15}{12}x^2 - \frac{63}{12}x + \frac{24}{12} = \frac{5}{4}x^2 - \frac{21}{4}x + 2$$

Beispiel 4) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	2	3
y	1	0	3	2

mit Hilfe der Newton-Interpolation.

$$\underset{x_0\ y_0}{(0,1)},\ \underset{x_1\ y_1}{(1,0)},\ \underset{x_2\ y_2}{(2,3)},\ \underset{x_3\ y_3}{(3,2)}$$

$$p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + b_3 x\cdot(x-1)(x-2)$$

$$1 = b_0$$

$$0 = b_0 + b_1 \rightarrow b_1 = -1$$

$$3 = b_0 + 2b_1 + 2\cdot 1\cdot b_2 = -1 + 2b_2 \rightarrow b_2 = 2$$

$$2 = b_0 + 3b_1 + 3\cdot 2\cdot b_2 + 3\cdot 2\cdot 1\, b_3 = 1 - 3 + 12 + 6b_3 = 2 \rightarrow b_3 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + b_3 x\cdot(x-1)(x-2)$$

$$= 1 - x + 2x^2 - 2x - \frac{4}{3}\underbrace{x(x^2-3x+2)}_{x^3-3x^2+2x} = \underline{-\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{17}{3}x + 1}$$

Beispiel 5) Mit Hilfe der (a) Sehnentrapezregel sowie (b) Simpson'schen Regel berechne man näherungsweise π aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls bei (a) in 2, 5 und 10 Teilintervalle, bei (b) in 10 Teilintervalle.

a/ <u>Sehnentrapezregel:</u>

$0 \quad 1$

$$g(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(x)} dx$$

1/

$n = 2$

$h = 0.5$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = f(0) = 1$

$x_1 = 0.5 \qquad y_1 = f(0.5) = \frac{4}{5}$

$x_2 = 1 \qquad y_2 = f(1) = \frac{1}{2}$

$$Q(f) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + y_2\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{8}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{31}{40} \approx \frac{\pi}{4} \quad | \cdot 4$$

$$= \frac{31}{10} \approx 3.1 \approx \pi$$

2/

$n = 5$

$h = 0.2$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$x_1 = 0.2 \qquad y_1 = \frac{25}{26}$

$x_2 = 0.4 \qquad y_2 = \frac{25}{29}$

$x_3 = 0.6 \qquad y_3 = \frac{25}{34}$

$x_4 = 0.8 \qquad y_4 = \frac{25}{41}$

$x_5 = 1 \qquad y_5 = \frac{1}{2}$

$$Q(f) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(1 + \frac{50}{26} + \frac{50}{29} + \frac{50}{34} + \frac{50}{41} + \frac{1}{2}\right) \approx 0.7853 \quad | \cdot 4$$

$$\rightarrow \quad 3.1349 \approx \pi$$

3/ $n = 10$, $h = 0.1$

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$x_6 = 0.6$	$y_6 = \frac{25}{34}$
$x_1 = 0.1$	$y_1 = \frac{100}{101}$	$x_7 = 0.7$	$y_7 = \frac{100}{149}$
$x_2 = 0.2$	$y_2 = \frac{25}{26}$	$x_8 = 0.8$	$y_8 = \frac{25}{41}$
$x_3 = 0.3$	$y_3 = \frac{100}{109}$	$x_9 = 0.9$	$y_9 = \frac{100}{181}$
$x_4 = 0.4$	$y_4 = \frac{25}{29}$	$x_{10} = 1$	$y_{10} = \frac{1}{2}$
$x_5 = 0.5$	$y_5 = \frac{4}{5}$		

$$Q(f) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_9 + y_{10}\right) = 0.784 \xrightarrow{\times 4} 3.139 \approx \pi$$

Input

$$\frac{1}{20}\left(1 + \frac{200}{101} + \frac{50}{26} + \frac{200}{109} + \frac{50}{29} + \frac{8}{5} + \frac{50}{34} + \frac{200}{149} + \frac{50}{41} + \frac{200}{181} + \frac{1}{2}\right)$$

Exact result — Step-by-step solution

$$\frac{12\,248\,312\,522\,521\,419}{15\,603\,313\,665\,089\,800}$$

Decimal approximation — More digits

0.784981497226789721242781559056250518309166394845773092246739088 8

b/ Simpsonsche Regel:

$n = 10$ $\quad x_0 \dots x_{10}$ oben

$h = 0.1$ $\quad y_0 \dots y_{10}$ oben

$$Q^{S1}(f) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_9 + y_{10}\right) \approx 0.78539$$

Input

$$\frac{0.1 \times 4}{3}\left(1 + \frac{400}{101} + \frac{50}{26} + \frac{400}{109} + \frac{50}{29} + \frac{16}{5} + \frac{50}{34} + \frac{400}{149} + \frac{50}{41} + \frac{400}{181} + \frac{1}{2}\right)$$

Result — Enlarge | Data | Customize | Plain Text

3.14159261393921521967953028435169328590168742699945984854293332 17

...

Repeating decimal — More digits

3.14159261393921521967953028435169328590168742699945984854293332 17

Beispiel 6) Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 1 + x - y^3, \; y(0) = 0$$

bestimme man die Lösung an der Stelle $x = 1$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren, und zwar für die Schrittweiten (a) $h = 0.25$ sowie (b) $h = 0.1$.

a/ $y'(x) = 1 + x - y^3$ $\qquad y_0 = 0 \quad x_0 = 0$

$f(x,y) = 1 + x - y^3$

$h = 0.25$ $\qquad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$x_{i+1} = x_i + h = x_0 + i \cdot h$

$$y_1 = 0 + 0.25 \cdot \overbrace{f(0,0)}^{1} = 0.25$$

$$y_2 = 0.25 + 0.25 \cdot f(0.25, 0.25) = 0.558594$$

$$y_3 = 0.558594 + 0.25(0.5, 0.558594) = 0.89002$$

$$y_4 = 0.89002 + 0.25(0.75, 0.89002) = \underline{\underline{1.15127}}$$

$$x_4 = 1 \rightarrow y'(1) \approx \underline{1.15127}$$

b/ $y'(x) = 1 + x - y^3$ $\qquad y_0 = 0 \quad x_0 = 0$

$f(x,y) = 1 + x - y^3$

$h = 0.1$ $\qquad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$x_{i+1} = x_i + h = x_0 + i \cdot h$

$$y_1 = 0 + 0.1 \cdot f(0,0) = 0.1$$

$$y_2 = 0.1 + 0.1 \cdot f(0.1, 0.1) = 0.2099$$

$$y_3 = 0.2099 + 0.1 \cdot f(0.2, 0.2099) = 0.328975$$

$$y_4 = 0.328975 + 0.1 \cdot f(0.3, 0.328975) = 0.455415$$

$$y_5 = 0.585969$$

$$y_6 = 0.71585$$

$$y_7 = 0.839167$$

$$y_8 = 0.950072$$

$$y_9 = 1.04432$$

$$y_{10} = 1.12042$$

$$x_{10} = 1 \rightarrow y'(1) \approx \underline{1.12042}$$