7. UE Analysis für INF und WINF

$\boxed{196}$ (a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)-3(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-2x^3+3x^2-1}{x^5-x^3-x^2+1} =$

$= „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-6x^2+6x}{5x^4-3x^2-2x} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-12x+6}{20x^3-6x-2} =$

$= \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$. Es wurde zweimal die Regel von de l'Hospital (Buch, S. 35) angewendet.

Alternative, bei der die Regel nur einmal angewendet wird: $1-x^2=(1-x)(1+x)$, $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{-x^4-x^3+x+1} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1}{-4x^3-3x^2+1} = -\frac{1}{2}.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{17+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{x-12+\frac{1}{x^2}} = „\frac{17}{\infty}" = 0.$

Alternative mit Regel von l'Hospital (zweimal):

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{34x+4}{3x^2-24x} =$

$= „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{34}{6x-24} = \frac{34}{\infty} = 0.$ (Beachte dazu: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-12x^2+1) = \lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = „\infty\cdot 1" =$

$= \infty$.)

$\boxed{206}$ $$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}(x\cdot \ln x)} = e^0 = 1,$$

denn: $$\lim_{x\to 0+}(x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{"} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$$

$\boxed{220}$ Der Definitionsbereich von $\frac{u'(x)}{u(x)}$ muss ein Intervall I sein, in dem $u(x) \neq 0$ ist. Setzen wir voraus – wegen der Existenz von $u'(x)$ – dass $u(x)$ stetig ist, dann gibt es 2 Fälle:

(i) $u(x) > 0$, $\forall x \in I$. Die Substitution $u(x) = z$, $u'(x)dx = dz$ liefert: $$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln u(x) + C.$$

(ii) $u(x) < 0$, $\forall x \in I$. Analog zu (i) folgt:
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{dz}{z} = \ln(-z) + C = \ln(-u(x)) + C.$$

Also gilt in beiden Fällen: $$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C.$$

Setzen wir $u(x) = \ln x$, dann ist $u'(x) = \frac{1}{x}$.
Wieder gibt es 2 Fälle für den Definitionsbereich.

(i) $I = (1,\infty) \implies \int \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln(\ln x) + C.$

(ii) $I = (0,1) \implies \int \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \ln|\ln x| + C = \ln(-\ln x) + C.$

Anmerkung: Bei unbestimmten Integralen muss der Definitionsbereich immer ein Intervall sein.

$\boxed{223}$ Wir verwenden partielle Integration (Buch, 5.41):

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx.$$

Mit $f=(1+x^2)^{-n}$, $f'=-2nx(1+x^2)^{-n-1}$, $g'=1$, $g=x$ ergibt sich:

$$I_n(x)=\int(1+x^2)^{-n}dx = x\cdot(1+x^2)^{-n}+2n\int\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)dx=$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\cdot(I_n(x)-I_{n+1}(x)) \Longrightarrow$$

$$2n\,I_{n+1}(x)=(2n-1)I_n(x)+\frac{x}{(1+x^2)^n}\Longrightarrow$$

$$I_{n+1}(x)=\frac{2n-1}{2n}\cdot I_n(x)+\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

$$I_1(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+C.$$

Im Folgenden lassen wir die Konstante C weg und schreiben erst zum Schluss eine Konstante D hin.

$$I_2(x)=\frac{1}{2}\cdot I_1(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\Longrightarrow I_2(x)=\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$\Longrightarrow I_3(x)=\frac{3}{4}\cdot I_2(x)+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}+D=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(3\arctan x+\frac{3x}{1+x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)+D.$$

$\boxed{243}$ Wir verwenden partielle Integration (Buch, 5.41):

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx.$$

$$\int x \cdot (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\left(f = (\ln x)^2, \; f' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, \; g' = x, \; g = \frac{x^2}{2} \right)$$

$= \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot \ln x \, dx.$ Analog wie zuvor berechnen wir: $\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} + C.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int x \cdot (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

Probe durch Differenzieren:

$$\left(\frac{x^2}{2} \cdot \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) \right)' = x \cdot \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{x^2}{2} \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \ldots = x \cdot (\ln x)^2.$$

$\boxed{234}$ $x^3 - 3x + 2$ hat die Nullstelle 1, und es gilt: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$, wie man durch Polynom-Division mit dem „Horner-Schema" erkennt.

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1, \\ -2. \end{cases}$$

Also gilt: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$.

Als nächstes erhalten wir durch Division mit Rest:

$x^3-x^2+2 = 1\cdot(x^3-3x+2) + (-x^2+3x)$, also:

$$\frac{x^3-x^2+2}{x^3-3x+2} = 1 + \frac{-x^2+3x}{x^3-3x+2}.$$

Für die Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz: $\frac{-x^2+3x}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$.

Daraus folgt: $A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 = -x^2+3x$.

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A \quad\quad + C &= -1 \\ A + B - 2C &= 3 \\ -2A + 2B + C &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{6}{9}$, $C = -\frac{10}{9}$.

Alternative Methode durch „Einsetzen":

$x=1 \implies 3B = 2 \implies B = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

$x=-2 \implies 9C = -10 \implies C = -\frac{10}{9}$.

Koeffizientenvergleich bei x^2:

$A + C = -1 \implies A = -1 - C = \frac{1}{9}$.

Damit haben wir:

$$\int \frac{x^3-x^2+2}{x^3-3x+2}\,dx = \int \left(1 + \frac{-x^2+3x}{x^3-3x+2}\right) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} - \frac{10}{x+2}\right)\right) dx =$$

$$= x + \frac{1}{9}\cdot\left(\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - 10\ln|x+2|\right) + C.$$

Für das Definitionsintervall gibt es 3 Möglichkeiten: $I_1 = (-\infty,-2)$, $I_2 = (-2,1)$, $I_3 = (1,\infty)$.