(1) [10 Punkte]

2,5

(a) Man definiere allgemein, wann zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\geq1}$ und $(b_n)_{n\geq1}$ **asymptotisch gleich** sind, also $a_n \sim b_n$ gilt.

(b) Wir betrachten nun die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ mit $a_n = \binom{2n}{n} \cdot 4^{-n}$, wobei bekanntlich der auftretende Binomialkoeffizient definiert ist via $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, für $0 \leq k \leq n$. Unter Verwendung der Stirling'schen Formel für die Faktoriellen:

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

zeige man **asymptotische Gleichheit** von a_n mit einer **Vergleichsfolge** der Art $g_n = c \cdot n^\alpha$, das heißt

$$a_n = \binom{2n}{n} 4^{-n} \sim c \cdot n^\alpha,$$

wobei $c, \alpha \in \mathbb{R}$ bestimmt werden müssen.

Hinweis: Sie dürfen dabei verwenden, dass für Folgen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ gilt:

$$a_n \sim b_n \quad \text{und} \quad c_n \sim d_n \quad \Rightarrow \quad a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n.$$

Analog für die Division, sofern nicht durch 0 dividiert wird.

(c) Unter Zuhilfenahme der Ergebnisse von (b) und unter geeigneter Verwendung des Majoranten- bzw. des Minorantenkriteriums mit einer hyperharmonischen Reihe als Vergleichsreihe entscheide man, ob die folgende **Reihe konvergiert** oder **divergiert**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n}.$$

Anmerkung: Das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium versagen bei dieser Reihe, es ist deshalb nicht zielführend, diese hier anzuwenden.

a) zwei reelle Folgen a_n und b_n sind genau dann asymptotisch gleich wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ✓ völlig falsche Rechng; $n!\cdot n! \neq n!\cdot 2$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{g_n} = \frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}}{c\cdot n^a} \overset{\lim}{=} \frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot 2}}{c\, n^a} \overset{\lim}{=} \frac{(2n)!}{n!\cdot 2\cdot c\cdot n^a} \overset{\lim}{=} \frac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\cdot\sqrt{2\pi n 2}}{\frac{n^n}{e^n}\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot 2\cdot c\, n^a}$

$2^{2n-1}\cdot n^{2x}$ $\sqrt{4\pi n}$

$(2n)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi n 2}$

$\lim$ 2^{2n} $\sqrt{4\pi n}$

7,5

(2) [10 Punkte] Man bestimme die **Lösung** $y(x)$ der **linearen Differentialgleichung**

$$x\, y' + y = \ln(x),$$

welche $y(e) = 0$ erfüllt (mit e die Eulersche Zahl).

$x y' + y = \ln(x) \quad | -y \,|:x \Leftrightarrow y' = \frac{\ln(x) - y}{x} \Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{y_p} - \underbrace{\frac{y}{x}}_{y_h}$

$\cancel{y' + y = \frac{\ln(x)}{x}}$

$\cancel{y' = \frac{\ln(x)}{x} - y}$

$y_h = C \cdot e^{\int -\frac{1}{x}\, dx} \Leftrightarrow y_h = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x}\, dx} \Leftrightarrow y_h = C \cdot e^{-\ln|x|}$

$y_h = C \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}} = y_h = C \cdot \frac{1}{\ln|x|}$ ↯ falsch!

$\cancel{y_h = C \cdot e^{\int -1\, dx}} = C \cdot e^{-x}$

$\cancel{x \cdot e^{-x} \int \frac{\ln(x)}{x e^{-x}} = e^{-x} \int \frac{\ln(x)}{x e^{-x}}}$

~~Partielle Integration~~

$= x \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \int \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{1}{x \ln(x)}}\, dx = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \int \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{\ln(x)}{1}\, dx = \frac{1}{\ln(x)} \int \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$

~~nochmal partiell!~~

$\cancel{\ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \ln^2(x) \cdot \ln(x) - \int 2\ln(x) \cdot \frac{\ln(x)}{x}\, dx}$

$u = \ln^2(x) \quad \frac{du}{dx} = 2($

(3) [10 Punkte] Reelle Funktionen in einer Variablen.

4

(a) Man gebe eine mathematisch exakte Definition, wann eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 **stetig** ist bzw. wann sie an der Stelle x_0 **differenzierbar** ist.

(b) Wie kann man mit Hilfe der Differentialrechnung entscheiden, ob eine reelle Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $I = [a, b]$ **monoton fallend** ist? Genaue Formulierung inklusive Voraussetzungen.

(c) Wie kann man mit Hilfe der Differentialrechnung entscheiden, ob eine reelle Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $I = [a, b]$ **linksgekrümmt**, also **konvex**, ist? Genaue Formulierung inklusive Voraussetzungen.

(d) Wie ist die **Taylorreihe** $T(x)$ einer reellen Funktion $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0 definiert? Weiters gebe man eine in der Lehrveranstaltung kennengelernte **Taylorreihenentwicklung** für eine beliebige konkrete elementare Funktion an.

a) ~~A~~ f ist stetig an der stelle x_0 wenn ~~[illegible]~~ für alle a

$\lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x^-} = c$ also der rechtsseitige und der linksseitige

~~nein, der Grenzwert~~,

gleich und f ~~dif~~ diffbar an x_0 wenn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ~~existiert~~

Wenn f diffbar ~~und die er~~ dann $f'(x_0) \le 0$ für $\forall x \in [a,b]$

(a,b)

Wenn ~~d~~ f 2 mal diffbar, dann $f''(x) < 0$ sein ~~dann~~ für $x \in [a,b]$

$f''(x) \ge 0, \forall x \in (a,b)$

Taylorreihe am entw. punkt $x_0 = 0$!

10

(4) [10 Punkte = 2 · Anzahl korrekter Antworten in Tabelle]
Man finde die Antworten auf folgende kurze Aufgaben und trage diese anschließend in die Tabelle ein. Es werden für die Bewertung ausschließlich die in die Tabelle eingetragenen Werte herangezogen, Nebenüberlegungen und Rechnungen können selbstverständlich separat auf dem Blatt durchgeführt werden, gehen aber nicht in die Beurteilung ein! Für jede korrekte Antwort in der Tabelle gibt es zwei Punkte; es werden für inkorrekte Antworten KEINE Punkte abgezogen.

Aufgabe	Antwort $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Man berechne das folgende **uneigentliche Integral:** $$\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx.$$	$\frac{1}{2}$
Man ermittle den **Limes inferior** (kleinsten Häufungspunkt) für die angegebene Folge ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$): $$\liminf_{n\to\infty} \frac{n+1+(-1)^n n}{n-(-1)^n}.$$	0
Man bestimme den folgenden **Grenzwert:** $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}.$$	1

Aufgabe	Antwort $\in \mathbb{R}^2$
Man bestimme den einzigen **stationären Punkt** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, wo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein **relatives Maximum** besitzt: $$g(x,y) = y^3 - 6y^2 - x^2.$$	$(0,0)$
Man bestimme den einzigen **stationären Punkt** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, wo für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein **Sattelpunkt** vorliegt: $$g(x,y) = y^3 - 6y^2 - x^2.$$	$(0,4)$

$4 \cdot 4 = 16$

16
16
16
48

$3y^2 - 12y = 0$
$3y^2 = 12y$
$3y = 12$
$y = 4$

$x = 0$
$y = 0$

$-2x = 0$

$$\lim \frac{n+1+1n}{n-1} = \lim \frac{2n+1}{n-1} = \lim \frac{2n}{n-1} + \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\to 0} = 2$$

$g_x() = -2x$ $\quad g_{xx}() = -2$ $\quad g_{xy} = 0$

$g_y() = 3y^2 - 12y$ $\quad g_{yy}() = 6y - 12$ $\quad g_{yx} = 0$

$(0,0)$

$-2 \quad 0 \quad 14$

(5) [10 Punkte = Anzahl vollständig korrekter Antworten in Tabelle]

5

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen).

Sie können notwendige Überlegungen zur Beantwortung der Fragen z.B. auf der Rückseite des Blattes durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Welche der nachstehenden Folgen a_n erfüllen die beiden asymptotischen Beziehungen $a_n = \Omega(n^{-\frac{3}{2}})$ sowie $a_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$?

☒ $a_n = n^{-1}$ ☒ $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ ☒ $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

Wir betrachten die n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe, $S_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k$. Welche Θ-Beziehung erfüllt S_n?

○ $S_n = \Theta(n^2)$ ☒ $S_n = \Theta(2^n)$ ○ $S_n = \Theta(2^{2n})$

Sei (a_n) eine Cauchy-Folge, also für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, sodass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(\epsilon)$. Was gilt dann?

○ a_n ist monoton ☒ a_n ist konvergent ○ a_n ist Nullfolge

Welche der folgenden Bedingungen garantiert (ist also hinreichend für) die Divergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$?

○ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ○ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ☒ $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

Für welche a_n ist die zugehörige alternierende Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot a_n$ bedingt konvergent?

○ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ☒ $a_n = \frac{1}{n}$ ○ $a_n = \frac{1}{n^2}$

Welche Aussagen gelten für die Winkelfunktion $\tan(x)$?

○ $\tan(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert

☒ $\tan(x)$ besitzt für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine eindeutige Umkehrfunktion

○ $\tan(x)$ besitzt einen Grenzwert für $x \to +\infty$

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzen keine lokalen Extrema?

○ $f(x) = x^3$ ○ $f(x) = x^4$ ☒ $f(x) = e^{-x}$

Wenn eine reelle Funktion $f(x, y)$ in zwei Variablen (definiert auf einer offenen Menge) an der Stelle (x_0, y_0) total differenzierbar ist, was gilt dann sicherlich noch?

☒ f ist stetig an der Stelle (x_0, y_0)

☒ $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ existieren

○ alle Richtungsableitungen von f an der Stelle (x_0, y_0) existieren

---

Wie ist das Cauchy-Produkt zweier Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$ definiert ?

○ $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k\right)$ ○ $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k + b_{n-k}\right)$ ☒ $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)$

Wie kann man den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ bestimmen?

☒ $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ○ $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ○ $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^n}$